

А К А Д Е М И Я Н А У К С О Ю З А С С Р
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА

С. А. ХРИСТИАНОВИЧ, С. Г. МИХЛИН, Б. Б. ДЕВИСОН

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ В КАНАЛАХ И РЕКАХ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ
ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

Под редакцией
Н. Е. КОЧИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1938 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Часть первая	
С. А. Христианович. Неустановившееся движение в каналах и реках	
Глава 1. <i>Уравнения движения</i>	15
§ 1. Основные понятия	15
§ 2. Уравнения движения	17
§ 3. Установившееся движение	22
§ 4. Явление прыжка	24
§ 5. Исследование формы свободной поверхности	28
Глава 2. <i>Волны одного направления. Характеристики</i>	32
§ 6. Волны одного направления	32
§ 7. Характеристики	41
§ 8. Характеристики установившегося движения	47
§ 9. Характеристики прямой и обратной волны	48
Глава 3. <i>Неустановившееся движение при отсутствии сил сопротивления</i>	52
§ 10. Основные преобразования	52
§ 11. Общее исследование решений	54
§ 12. Волны, возникающие при встрече прямой и обратной волны	60
§ 13. Разложение неустановившегося движения на прямую и обратную волну	65
§ 14. Классификация волн	68
§ 15. Многолистные поверхности	71
§ 16. Задача об отражении	78
§ 17. Соответствующие глубины и скорости	82
§ 18. Координаты Лагранжа	89
Глава 4. <i>Разрушение волн</i>	93
§ 19. Прерывная волна	93
§ 20. Волны, возникающие при разрушении плотины	97
§ 21. Волны, возникающие при частичном разрушении плотины	103
§ 22. Начальные условия	105
§ 23. Разрушение волны одного направления	108
Глава 5. <i>Приближенный метод расчета</i>	114
§ 24. Приближенное построение сетки характеристик	114
§ 25. Приближенное решение краевых задач при отсутствии сил сопротивления	119
Глава 6. <i>Влияние сил сопротивления</i>	125
§ 26. Преобразование уравнений Буссинеска	125
§ 27. Краевые задачи для уравнений Буссинеска	130

§ 28. Расчеты неустановившихся движений	136
§ 29. Примеры расчетов	143
§ 30. Волны малой амплитуды	147
Литература	154

Часть вторая

С. Г. Михлин. Математическая теория пластичности

Введение	157
§ 1. Уравнения Сен-Венана, М. Леви и Мизеса	159
§ 2. Характеристики уравнений пластичности	168
§ 3. Преобразование М. Леви	171
§ 4. Интегралы уравнений пластичности	173
§ 5. Преобразование граничных условий	176
§ 6. Решение уравнений пластичности. Общие замечания. Случай прямолинейных характеристик	178
§ 7. Применения преобразования М. Леви	181
§ 8. Теорема существования	185
§ 9. Исследование решения	192
§ 10. Многолистные поверхности. Простейший случай	195
§ 11. Общий случай	198
§ 12. Особые решения	200
§ 13. Уравнения скоростей смещений	202
§ 14. Смешанная задача	205
§ 15. Распространение пластического состояния	211
Литература	215

Часть третья

Б. Б. Девисон. Движение грунтовых вод

Глава 1. Уравнения движения грунтовых вод	219
§ 1. Грунтовые воды	219
§ 2. Модель явления и основные постулаты	219
§ 3. Уравнения движения грунтовых вод	224
§ 4. Граничные условия	227
Глава 2. Плоское установившееся движение грунтовых вод без свободной поверхности и без промежутков высачивания	233
§ 5. Некоторые общие замечания о плоском установившемся движении	233
§ 6. Движение без свободной поверхности и без промежутков высачивания. Простейшие примеры	235
§ 7. Замечания к получаемым решениям	243
Глава 3. Неустановившееся движение грунтовых вод без свободной поверхности и без промежутков высачивания	245
§ 8. Метод решения	245
§ 9. Примеры	250
Глава 4. Задачи плоского безнапорного движения грунтовых вод, решаемые по методу конформного отображения	259
§ 10. Движение с выходом воды на откос, но без свободной поверхности	259
§ 11. Неустановившееся движение при наличии промежутка высачивания	266
§ 12. Движение со свободной поверхностью, без промежутка высачивания и без испарения	268

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

С. А. ХРИСТИАНОВИЧ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ В КАНАЛАХ И РЕКАХ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Вывод уравнений движения жидкости в каналах и реках, а также подробное исследование установившегося движения можно найти в любом хорошем курсе гидравлики.¹ Так как нашей целью является изложение теории неустановившегося движения, то мы лишь очень кратко остановимся на выводе основных уравнений и напомним только те вопросы из теории установившегося движения, которые являются исходными при изучении неустановившихся движений.

§ 1. Основные понятия

При изучении движений жидкости в каналах и реках рассматривают не истинные значения скоростей и давлений в отдельных точках потока, а некоторые средние значения этих величин.

Опыты показывают, что даже при тех движениях жидкости, которые принято считать установившимися, скорость в отдельных точках потока с течением времени испытывает непрерывное изменение как по величине, так и по направлению. Поэтому за значение скорости и давления в данной точке потока принимают средние их значения за некоторый промежуток времени. Обычные приборы для измерения скоростей и давлений дают именно эти средние значения.

В гидравлике, однако, не ограничиваются только таким осреднением во времени, исключаящим пульсации скоростей и давлений. Основное значение при изучении большинства вопросов о движении жидкости в каналах и реках имеет не скорость в отдельных точках потока, а средняя скорость в данном поперечном сечении русла. Средней скоростью называют отношение расхода жидкости в этом сечении к площади живого сечения [т. е. к площади сечения, занятого жидкостью (фиг. 1)].

Таким образом для средней скорости получают выражение

$$U = \frac{1}{F} \int_F u_s dF,$$

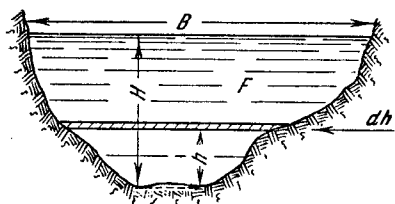
¹ Прекрасное изложение теории установившегося движения содержится, например, в руководствах Б. А. Бахметева, ставших классическими, „О неравномерном движении жидкости в каналах и реках“ и „Гидравлика открытых русел“ (пер. с английского), 1934.

При составлении настоящей главы мы главным образом использовали эти руководства.

где F — площадь живого сечения, а u_s — проекция скорости в данной точке на направление нормали к этому сечению.

Основное значение при изучении речного потока имеют движения жидкости, которые, следуя Буссинеску [8], называют медленно изменяющимися.

Жидкость в этом случае движется в русле, близком к призматическому, причем живые сечения изменяются вдоль потока и с течением времени очень медленно. Траектории отдельных частиц при таком движении почти прямолинейны, и скорости изменяются очень медленно при переходе от одной частицы к другой.



Фиг. 1.

Форма поперечного сечения русла исключает возможность образования поймы.¹ При этом скорости в отдельных точ-

ках поперечного сечения не очень сильно отклоняются от значения средней скорости в этом сечении.

При изучении медленно изменяющихся движений можно пренебречь составляющими скоростей и ускорений в плоскости поперечного сечения и считать движение одномерным.

Законность этого допущения становится яснее, если принять во внимание, что обычно длина русла измеряется километрами и даже десятками километров, в то время как глубина русла несколькими метрами. Изменение всех элементов движения по длине русла обычно происходит очень медленно. В некоторых случаях, когда хотят приблизительно учесть влияние кривизны поверхности и траекторий отдельных частиц, то, продолжая считать движение одномерным, вводят в уравнение некоторые поправочные члены.

Когда рассматривают движения жидкости в каналах или реках, их разделяют обычно на движение, медленно изменяющееся, и на движение с резкими местными изменениями. Такие резкие изменения в движении жидкости наступают, например, в местах, в которых русло претерпевает внезапное изменение своей формы, при явлении прыжка, при явлениях, связанных с внезапным резким изменением расхода в каком-нибудь сечении, и т. д. Во всех этих случаях упрощения, сделанные при изучении медленно изменяющихся движений, становятся уже неверными. Движение жидкости в этих случаях требует отдельного изучения.

Прежде чем перейти к выводу уравнений медленно изменяющегося движения, сравним живую силу движения жидкости с неравномерно распределенными по сечению скоростями с живой силой одномерного движения, при котором все частицы жидкости имеют скорости, равные средней.

Положим

$$u_s = U + \Delta u_s,$$

¹ Поймой называется часть русла, резко отличающаяся по своим глубинам от основной части русла. Если русло имеет пойму, то скорости в поперечном сечении в частях, относящихся к пойме и к основной части русла, резко отличны. Реки образуют широкие поймы весной во время разлива.

причем

$$\int_F \Delta u_s dF = 0. \quad (1.1)^1$$

Для живой силы массы жидкости, протекающей в единицу времени через элементарную площадку dF , имеем:

$$\frac{\gamma}{g} \frac{u_s^2}{2} u_s dF,$$

где γ — вес единицы объема жидкости и g — ускорение силы тяжести.

Для живой силы массы жидкости, протекающей в единицу времени через все поперечное сечение русла, имеем таким образом:

$$\frac{\gamma}{2g} \int_F u_s^3 dF = \frac{\gamma}{2g} \int_F (U + \Delta u_s)^3 dF,$$

откуда, принимая во внимание (1.1), получим:

$$\frac{\gamma}{2g} \int_F u_s^3 dF = \frac{\gamma}{2g} \left[U^3 F + 3U \int_F (\Delta u_s)^2 dF + \int_F (\Delta u_s)^3 dF \right].$$

Составляя отношение рассматриваемой живой силы к живой силе одномерного движения, получим:

$$\frac{1}{U^3 F} \int_F u_s^3 dF = 1 + \frac{3}{U^2 F} \int_F (\Delta u_s)^2 dF + \frac{1}{U^3 F} \int_F (\Delta u_s)^3 dF.$$

Так как отношение $\frac{\Delta u_s}{U}$ весьма мало, а Δu_s может быть как положительно, так и отрицательно, то последнее слагаемое, стоящее в правой части предыдущего равенства, мало по сравнению со вторым слагаемым. Пренебрегая им и полагая

$$1 + \frac{3}{U^2 F} \int_F (\Delta u_s)^2 dF = \alpha,$$

получим:

$$\int_F u_s^3 dF = \alpha U^3 F. \quad (1.2)$$

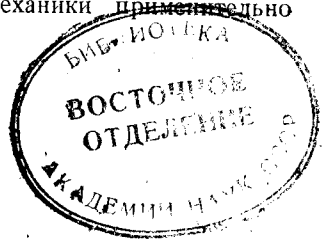
Коэффициент α всегда больше единицы. Опыты, относящиеся к установившемуся движению [3], показывают, что α зависит от шероховатости стенок и изменяется примерно в пределах $1.025 \leq \alpha \leq 1.15$.

§ 2. Уравнения движения

Уравнения движения жидкости состоят из уравнения, выражающего непрерывность движения (так наз. уравнение неразрывности), и из динамического уравнения, которое является выражением законов механики применительно к рассматриваемому случаю движения жидкости.

¹ Первая цифра обозначает главу, вторая — формулу.

² Механика сплошной среды



Уравнение неразрывности для неустановившихся движений было впервые составлено Сен-Венаном [26]. Для вывода этого уравнения рассмотрим два бесконечно близких поперечных сечения канала. Будем отсчитывать расстояние s вдоль канала вниз по течению от какого-нибудь произвольного начального сечения. Количество жидкости, протекающее за время dt через данное сечение, будет $Q dt$, где Q — расход, а через сечение на расстоянии ds —

$$\left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds\right) dt.$$

Таким образом увеличение количества жидкости между этими двумя сечениями за время dt равно

$$Q dt - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds\right) dt = -\frac{\partial Q}{\partial s} dt ds.$$

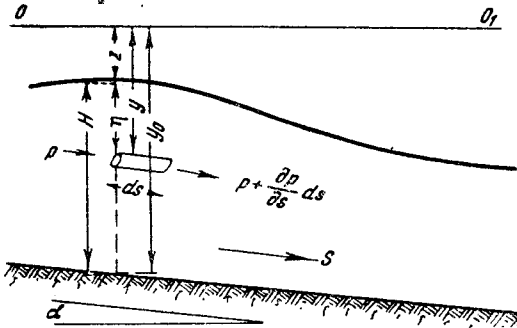
Накопление жидкости вызывает подъем уровня между рассматриваемыми сечениями, причем добавочный объем жидкости, соответствующий этому подъему, равен $\frac{\partial F}{\partial t} dt ds$.

Приравнявая эти выражения, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0. \quad (1.3)$$

Для составления динамического уравнения можно воспользоваться, следуя Кориолису [15], уравнением живых сил.

Применим уравнение живых сил к движению массы жидкости, протекающей за время Δt через элементарную площадку dF , расположенную в плоскости поперечного сечения русла.



Фиг. 2.

Рассмотрим силы, действующие на эту массу жидкости, и дадим более точную формулировку допущениям, связанным с тем, что движение медленно изменяющееся. Так как траектории отдельных частиц считаются почти прямолинейными, то составляющей ускорения в плоскости поперечного сечения и, в частности, вертикальной составляющей ускорения можно пренебречь.

Распределение давлений по вертикали будет тогда тем же, как в случае покоя или равномерного движения, т. е. будет следовать гидростатическому закону. Кроме силы давления, на рассматриваемую частицу будут действовать сила тяжести и сила трения, представляющая собой действие окружающей жидкости на рассматриваемую частицу. Силы сопротивления мы будем считать пропорциональными объему частицы и зависящими от ее скорости.

Положение рассматриваемой частицы можно определить расстоянием u от некоторой произвольной горизонтальной плоскости 00_1 (фиг. 2).

Составляя уравнение живых сил, получим:

$$d\left(\frac{\gamma}{g} \frac{u_s^3}{2} dF \Delta t\right) = \gamma u_s \Delta t dF \frac{\partial y}{\partial s} ds - u_s \Delta t dF \frac{\partial p}{\partial s} ds - \Phi(u_s) dF u_s \Delta t ds,$$

где $\Phi(u_s)$ — сила сопротивления, отнесенная к единице объема.

Принимая во внимание, что

$$p = \gamma(y - z),$$

где z — расстояние свободной поверхности от плоскости OO_1 , получим:

$$d\left(\frac{\gamma}{g} \frac{u_s^3}{2} dF \Delta t\right) = \gamma u_s \Delta t dF \frac{\partial z}{\partial s} ds - \Phi(u_s) u_s dF ds \Delta t. \quad (1.4)$$

Так как скорости частиц почти перпендикулярны к площади поперечного сечения и изменяются очень медленно при переходе от одной частицы к другой, то уравнение движения для всего потока можно получить путем интегрирования (1.4) по площади поперечного сечения.

Пользуясь (1.2), изменение живой силы при переходе от одного сечения к другому можно выразить в виде:

$$\frac{\gamma \Delta t}{2g} \int_{F_1} u_{s1}^3 dF_1 - \frac{\gamma \Delta t}{2g} \int_{F_2} u_{s2}^3 dF_2 = \frac{\gamma \Delta t}{2g} (\alpha_1 U_1^3 F_1 - \alpha_2 U_2^3 F_2).$$

Считая, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{const}$, получим:

$$\frac{\gamma}{2g} \alpha d(U^3 F) \Delta t = \gamma U F \frac{\partial z}{\partial s} ds \Delta t - ds \Delta t \int \Phi(u_s) u_s dF;$$

так как

$$\frac{\gamma}{g} U F \Delta t = M$$

есть масса рассматриваемого количества жидкости, то $M = \text{const}$. Сокращая предыдущее уравнение на $Mg ds$, получим:

$$\frac{\alpha}{2g} \frac{dU^2}{ds} = \frac{\partial z}{\partial s} - \varphi, \quad (1.5)$$

где φ обозначает силы сопротивления, отнесенные к единице веса жидкости.

Так как

$$U = U(s, t)$$

и так как мы рассматриваем изменение скорости, следуя за движущейся жидкостью, то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{\partial U}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) ds. \quad (1.6)$$

Кроме того обозначим через H (фиг. 1 и 2) наибольшую глубину в данном сечении, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial(y_0 - H)}{\partial s}, \quad (1.7)$$

где y_0 есть расстояние дна до плоскости OO_1 . Линия, проведенная через точки наибольшей глубины в каждом сечении, называется линией дна.

Обозначим через

$$i_0 = \frac{\partial y_0}{\partial s} = \sin \alpha \approx \alpha$$

уклон дна. Производная $\frac{\partial H}{\partial s}$ выражает уклон свободной поверхности.

Пользуясь (1.6) и (1.7), преобразуем (1.5). Получим

$$\frac{\alpha}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right) = i_0 - \frac{\partial H}{\partial s} - \varphi.$$

Если движение жидкости происходит в призматическом (цилиндрическом) канале и притом оно равномерно, т. е. такое, при котором средняя скорость и глубина остаются неизменными как во времени, так и по длине канала, то из предыдущего уравнения получаем

$$i_0 = \varphi. \quad (1.8)$$

Опыты показывают, что в случае равномерного движения силы сопротивления выражаются в виде

$$\varphi = \frac{U^2}{C^2 R},$$

где R — гидравлический радиус, т. е. отношение площади живого сечения к смоченному периметру этого сечения; C — коэффициент Шези. Коэффициент C зависит от шероховатости русла, а также, хотя и незначительно, от размеров потока. Существуют многочисленные эмпирические формулы, выражающие C в зависимости от материала стенок русла и размеров потока.

В дальнейшем мы будем пользоваться либо формулой Базена [2]

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}, \quad (1.9)$$

либо формулой Маннинга [20]

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}. \quad (1.10)$$

Значение постоянных γ и n для различных материалов можно найти в любом гидравлическом справочнике [21].

Если предположить, что силы сопротивления при движении жидкости в общем случае имеют то же выражение, что при равномерном движении, то для динамического уравнения получается окончательно следующее выражение:

$$i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} - \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\alpha}{g} \left(U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t} \right). \quad (1.11)$$

Таким образом, уравнения медленно изменяющегося движения жидкости будут системой уравнений (1.3) и (1.11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(UF)}{\partial s} &= 0, \\ i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} - \frac{\partial H}{\partial s} &= \frac{\alpha}{g} \left(U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

К этим уравнениям надо присоединить еще зависимость между площадью живого сечения и наибольшей глубиной. В общем случае эта зависимость имеет вид:

$$F = F^*(H, s). \quad (1.13)$$

В случае призматического русла F зависит только от H . Нетрудно видеть, что

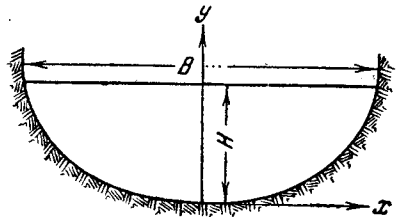
$$\frac{\partial F^*}{\partial H} = B, \quad (1.14)$$

где B (фиг. 3) — ширина водного зеркала в рассматриваемом сечении. Исключая H из уравнений (1.12), получим для призматического русла:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(UF)}{\partial s} &= 0, \\ i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} - \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{a}{g} \left(U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В дальнейшем, кроме рассмотрения случая, когда зависимость (1.13) имеет произвольный вид, мы особенно подробно остановимся именно на случае призматического русла и, в частности, на случае русла, для которого зависимость между площадью живого сечения и глубиной выражается в виде

$$F = AH^n, \quad (1.16)$$



Фиг. 3.

где A и n — постоянные. В частности, сюда относятся русла, сечение которых ограничено параболлами. Пусть $y = ax^k$ (фиг. 3) есть уравнение кривой, ограничивающей поперечное сечение русла. Тогда

$$F = BH - 2 \int_0^{\frac{B}{2}} ax^k dx = BH - \frac{a}{2k(k+1)} B^{k+1},$$

или, так как $H = \left(\frac{B}{2}\right)^k a$, то

$$F = \frac{k}{k+1} BH = \frac{2k}{k+1} \frac{1}{\sqrt[k]{a}} H^{\frac{k+1}{k}}, \quad (1.17)$$

откуда

$$A = \frac{2k}{k+1} \frac{1}{\sqrt[k]{a}} \quad (1.18)$$

и

$$n = \frac{k+1}{k}. \quad (1.19)$$

В дальнейшем мы будем называть русла, у которых зависимость (1.13) между площадью живого сечения и глубиной выражается формулой (1.16), параболическими руслами вне зависимости от того, ограничено ли в действительности сечение русла параболой или нет.

Так как нет никаких экспериментальных данных относительно значений коэффициента α при неустановившемся движении, то в дальнейшем при изучении неустановившегося движения мы всюду положим его равным единице. Если из каких-либо соображений будет желательно ввести этот коэффициент, то всегда нетрудно будет исправить соответствующие формулы, заменяя везде коэффициент $\frac{1}{g}$ через $\frac{\alpha}{g}$.

§ 3. Установившееся движение

Уравнения (1.12) имеют частное решение, соответствующее установившемуся движению. Считая, что U и F не зависят от времени, из уравнений (1.12) получаем:

$$\left. \begin{aligned} UF = Q_0 = \text{const}, \\ i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} - \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\alpha}{g} U \frac{\partial U}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Исключая из уравнения (1.20) U и принимая во внимание, что

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F^*}{\partial s} + B \frac{dH}{ds},$$

получим:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{i_0 - \frac{Q_0^2}{C^2 R F^2} + \frac{\alpha Q_0^2 \partial F^*}{g F^3 \partial s}}{1 - \frac{\alpha Q_0^2 B}{g F^3}}. \quad (1.21)$$

Если русло призматическое, то $\frac{\partial F^*}{\partial s} = 0$ и уравнение (1.21) имеет вид:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{i_0 - \frac{Q_0^2}{C^2 R F^2}}{1 - \frac{\alpha Q_0^2 B}{g F^3}}. \quad (1.22)$$

Мы остановимся сейчас на рассмотрении только этого последнего случая.

Основное значение при изучении установившегося движения имеют понятия нормальной и критической глубины. Нормальной глубиной называется глубина, соответствующая равномерному движению в данном призматическом русле при расходе Q_0 . Она определяется путем приравнивания нулю числителя в правой части уравнения (1.22). Это уравнение имеет частное решение, соответствующее равномерному движению $H = H_0$, где H_0 есть нормальная глубина.

Для определения нормальной глубины мы имеем, таким образом, уравнение:

$$i_0 - \frac{Q_0^2}{C^2 R F^2} = 0. \quad (1.23)$$

Из уравнения (1.22) также видно, что при некотором определенном значении глубины знаменатель дроби, стоящей в правой части, обращается в бесконечность. При этом значении глубины касательная к линии свободной поверхности становится вертикальной. Эта глубина называется критической глубиной (H_k).

Для определения критической глубины служит уравнение

$$1 - \frac{\alpha Q_0^2 B}{g F^3} = 0. \quad (1.24)$$

Обозначим

$$K(H) = \frac{Q_0^2}{C^2 R F^2} \quad (1.25)$$

$$\Lambda(H) = \frac{F^3}{B}. \quad (1.26)$$

Из уравнения (1.23) следует, что

$$K(H_0) = i_0, \quad (1.27)$$

а из уравнения (1.24), что

$$\Lambda(H_k) = \frac{\alpha Q_0^2}{g}. \quad (1.28)$$

Пользуясь новыми обозначениями, уравнение (1.22) можно переписать в виде:

$$\frac{dH}{ds} = i_0 \frac{1 - \frac{K(H)}{K(H_0)}}{1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H)}}. \quad (1.29)$$

Вычислим теперь значения нормальной и критической глубины для параболических русел (1.16). Обычно всегда приходится иметь дело с руслами, у которых ширина во много раз превосходит глубину. Для таких русел можно с достаточной точностью считать, что длина смоченного периметра поперечного сечения приближенно равна ширине водного зеркала в этом сечении. Ширина водного зеркала определяется из формулы (1.14). Таким образом гидравлический радиус для рассматриваемых русел

$$R \approx \frac{H}{n}. \quad (1.30)$$

Из уравнения (1.23) получаем для нормальной глубины выражение

$$H_0^{2n+1} = \frac{Q_0^2 n}{i_0 A^2 C^2}$$

и для критической глубины выражение

$$H_k^{2n+1} = \frac{\alpha Q_0^2 n}{g A^2}.$$

Заменяя в уравнении (1.24) расход произведением площади живого сечения на среднюю скорость и считая $\alpha = 1$, получим, что при критической глубине средняя скорость равна

$$U = \sqrt{\frac{gF}{B}}. \quad (1.31)$$

Если предположить, что C^2 не зависит от H , то, пользуясь предыдущими формулами, уравнение (1.29) для параболических русел можно преобразовать так:

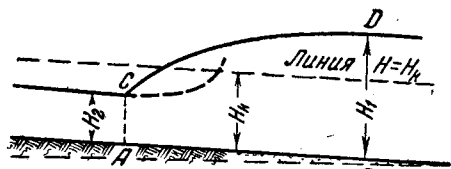
$$\frac{dH}{ds} = i_0 \frac{H^{2n+1} - H_0^{2n+1}}{H^{2n+1} - H_k^{2n+1}}. \quad (1.32)$$

Здесь, как видно из (1.19), для прямоугольного русла $n=1$, для русла, ограниченного параболой второй степени, $n = \frac{3}{2}$.

§ 4. Явление прыжка

Вблизи того места, где глубина потока становится равной критической глубине, движение жидкости перестает быть медленно изменяющимся, так как кривизна траекторий частиц и, в частности, кривизна свободной поверхности становятся очень значительными. Уравнения (1.22) и (1.29) могут служить для определения свободной поверхности только на тех участках русла, для которых везде $H > H_k$ или $H < H_k$.

По данным опыта оказывается, что если глубина становится равной критической, то образуется так называемый „прыжок“. На фиг. 4 схематически изображена свободная поверхность жидкости в канале при прыжке. Пунктирная



Фиг. 4.

линия дает вид кривой свободной поверхности на основании уравнения (1.22), а сплошная линия — наблюдаемую кривую. На сравнительно небольшом участке АВ глубина и средняя скорость потока испытывают резкое изменение, причем глубина изменяется от значения меньше критического до значения больше критического.

Движение жидкости при прыжке носит очень сложный характер и не может рассматриваться как одномерное. Однако, пользуясь некоторыми упрощающими допущениями, нетрудно составить приближенное уравнение, связывающее глубины и средние скорости до и после прыжка. При этом, как всегда при изучении явлений, сопровождающихся внезапными резкими изменениями скоростей (своего рода ударом), пользуются уравнением количества движения. Это уравнение впервые было выведено Беланже [6].

Предположим, что русло призматическое и дно горизонтально. Применим уравнение количества движения к массе жидкости, заключенной в момент t между сечениями АС и ВД, и предположим, что сечение АС взято в том месте, где параллельность струй еще не нарушалась, а сечение ВД на таком расстоянии от места прыжка, на котором медленно изменяющееся движение уже установилось.

За время Δt изменение количества движения рассматриваемой массы жидкости равно разности количеств движения, проносимых через сечения ВД и АС, т. е. равно

$$\frac{\gamma}{g} [U_1^2 F_1 - U_2^2 F_2] \Delta t,$$

где индексом „2“ обозначены величины, относящиеся к состоянию до прыжка (на фиг. 4 в сечении AC), и индексом „1“ — величины, относящиеся к состоянию после прыжка (сечение BD).

В выражение импульса сил войдет только разность сил давления в сечениях AC и BD , так как импульсами сил гидравлических сопротивлений можно пренебречь по сравнению с импульсом разности сил давления. Эти силы незначительны вследствие сравнительно небольшой длины прыжка. Если дно канала не горизонтально, то в выражение импульса вошел бы также член, отвечающий импульсу составляющей силы тяжести в направлении течения. Однако благодаря малости уклона и сравнительной незначительности длины прыжка импульсом силы тяжести можно также пренебречь. Из этого видно, что эти формулы, выведенные для движения в русле с горизонтальным дном, будут применимы и в общем случае.

Давления в сечениях AC и BD предполагаются распределенными по гидростатическому закону.

Если $F = F(H)$ выражает зависимость площади живого сечения от глубины, то полное давление в каком-нибудь поперечном сечении русла будет равно (фиг. 1)

$$\gamma P(H) = \gamma \int_0^H (H - h) \frac{dF}{dh} dh = \gamma \int_0^H F(h) dh. \quad (1.33)$$

Приравнявая изменение количества движения разности импульсов сил давления в сечениях, ограничивающих рассматриваемую массу жидкости, получим:

$$U_1^2 F_1 - U_2^2 F_2 = g[P(H_2) - P(H_1)], \quad (1.34)$$

или

$$U_2^2 F_2 + gP(H_2) = U_1^2 F_1 + gP(H_1). \quad (1.35)$$

Функция

$$\theta = \frac{Q_0^2}{F} + gP \quad (1.36)$$

носит название прыжковой функции.

Исследуем эту функцию. Вычисляя первую производную от θ по H , получим

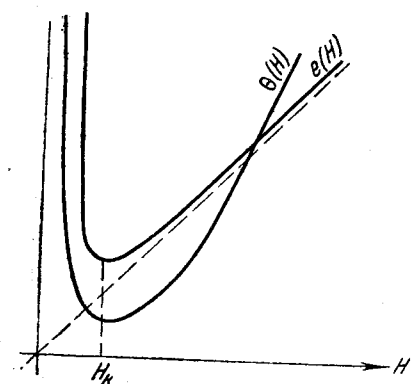
$$\frac{d\theta}{dH} = gF - \frac{Q_0^2 B}{F^2} = gF \left(1 - \frac{Q_0^2 B}{gF^3} \right).$$

Для всех русел, имеющих практическое значение, выражение $\frac{F^3}{B}$ есть возрастающая функция от H . Русла, не удовлетворяющие этому условию, имеют как бы широкую пойму и к ним не применима теория медленно изменяющихся движений.

Из сравнения выражения для $\frac{d\theta}{dH}$ с уравнением (1.24) (при $\alpha = 1$) следует, что $\frac{d\theta}{dH}$ обращается в нуль при $H = H_k$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dH} < 0 & \quad H < H_k, \\ \frac{d\theta}{dH} = 0 & \quad H = H_k, \\ \frac{d\theta}{dH} > 0 & \quad H > H_k. \end{aligned}$$

При значениях H , стремящихся к нулю и к бесконечности, функция θ стремится к бесконечности. Таким образом функция θ имеет вид, схематически изображенный на фиг. 5. Глубины H_2 и H_1 , до и после прыжка, называются взаимными. Взаимные глубины расположены на разных ветвях кривой $\theta(H)$ на прямых $\theta = \text{const}$. Зная глубину до прыжка, можно из уравнения (1.35), или пользуясь соответствующим графиком прыжковой функции, всегда найти одно и только одно определенное значение глубины после прыжка.



Фиг. 5.

Для пояснения явлений, происходящих при прыжке, очень важное значение имеет исследование энергии жидкости до и после прыжка. Это исследование приведено в указанных выше работах Б. А. Бахметева [4, 5]. В виду важности этого

вопроса для дальнейшего мы подробно остановимся на нем.

Энергией частицы, отнесенной к единице веса жидкости, называется выражение (фиг. 2)

$$E = H - \eta + \frac{p}{\gamma} + \frac{u_s^2}{2g},$$

причем энергия отнесена к линии дна (дно считается горизонтальным).

Принимая во внимание, что $p = \gamma\eta$, получим

$$E = H + \frac{u_s^2}{2g}.$$

Величина энергии жидкости, протекающей в единицу времени через данное сечение русла, будет равна

$$\gamma \int_F E u_s dF = \gamma U F H + \frac{\gamma}{2g} \int_F u_s^3 dF.$$

Принимая во внимание (1.2), получим для среднего значения энергии, отнесенной к единице веса рассматриваемой массы жидкости, следующее выражение

$$e = H + \frac{\alpha U^2}{2g}.$$

Если положить $\alpha = 1$, то

$$e = H + \frac{Q_0^2}{2gF^2}. \quad (1.37)$$

Проследим, как изменяется энергия e в зависимости от изменения глубины.

Вычислим производную от e по H . Имеем:

$$\frac{de}{dH} = 1 - \frac{Q_0^2 B}{gF^3} = 1 - \frac{\Lambda(H_k)'}{\Lambda(H)}.$$

Мы видим, что функция e имеет тот же характер, что функция θ . Энергия e достигает своего минимального значения при критической глубине. При $H < H_k$ энергия убывает с возрастанием глубины, а при $H > H_k$ возрастает. На фиг. 5 построен график функции (1.37). Соответствующая кривая имеет асимптотой прямую $e = H$. При H , стремящемся к нулю, e стремится к бесконечности.

Рассмотрим потерю энергии, происходящую при прыжке,

$$\delta = e_2 - e_1 = H_2 + \frac{Q_0^2}{2gF_2^2} - H_1 - \frac{Q_0^2}{2gF_1^2}. \quad (1.38)$$

Так как H_1 и H_2 связаны соотношением (1.35), то δ можно рассматривать как функцию от H_2 .

Дифференцируя (1.38) и принимая во внимание (1.26) и (1.28), имеем:

$$\frac{d\delta}{dH_2} = 1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H_2)} - \left(1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H_1)}\right) \frac{dH_1}{dH_2}.$$

Дифференцируя (1.35), получим:

$$\left(F_1 g - \frac{Q_0^2 B_1}{F_1^2}\right) dH_1 = \left(F_2 g - \frac{Q_0^2 B_2}{F_2^2}\right) dH_2,$$

откуда

$$\frac{dH_1}{dH_2} = \frac{F_1}{F_2} \frac{1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H_1)}}{1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H_2)}}.$$

Таким образом

$$\frac{d\delta}{dH_2} = \left(1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H_2)}\right) \frac{F_1 - F_2}{F_1},$$

откуда

$$\frac{d\delta}{dH_2} \leq 0;$$

действительно, если $H_2 \leq H_k$, то $\Lambda(H_2) \leq \Lambda(H_k)$ и $H_1 \geq H_k \geq H_2$, при $H_2 > H_k$ мы имеем $H_1 < H_k < H_2$.

Таким образом потеря энергии δ все время убывает с увеличением H_2 . При $H_2 = H_k = H_1$ эта потеря равна нулю. При $H_2 > H_k$ $\delta < 0$, т. е. происходит увеличение удельной энергии, но увеличение удельной энергии жидкости после прыжка невозможно, так как нет никаких источников энергии, за счет которых могла бы увеличиться механическая энергия. Таким образом, всегда $H_2 < H_k$. Из приведенных рассуждений можно сделать очень важное для дальнейшего заключение.

Глубина жидкости после прыжка, происходящего в призматическом русле, всегда больше глубины до прыжка. Это заключение можно сформулировать еще так:

В призматическом русле невозможны прыжки понижения (водопады).

Это заключение стоит в полном согласии с данными опыта. Прыжки понижения (водопады) наблюдаются только в тех местах, в которых происходит внезапное расширение русла или внезапное увеличение уклона дна.

Таким образом явление прыжка всегда сопровождается потерей механической энергии.

Буссинеск [8] разделил все течения на спокойные (реки) и бурные (стремнины). В основе этой классификации лежит понятие критической глубины. Если глубина в потоке меньше критической, то скорости в потоке велики и в этом потоке может образоваться прыжок. Таким образом бурные потоки характеризуются тем, что [(1.24) при $\alpha = 1$]

$$\frac{F^3}{B} < \frac{Q_0^2}{g}, \quad (1.39)$$

или, заменяя Q_0 выражением UF ,

$$U > \sqrt{\frac{gF}{B}}. \quad (1.40)$$

Если глубина больше критической, то прыжок в этом потоке не может образоваться. Средняя скорость в нем меньше, чем в бурном. Течение в таком потоке называется спокойным. Прыжок является, таким образом, формой перехода от бурного состояния потока к спокойному. Этот переход всегда сопровождается потерей энергии.

В заключение отметим, что произведенное исследование дает возможность только приближенно учесть изменение глубин и скоростей после прыжка, т. е. влияние образования прыжка на движение жидкости в канале. На основании этого исследования, конечно, нельзя сделать никаких заключений ни о длине прыжка, ни о движении жидкости в области, занятой прыжком.

§ 5. Исследование формы свободной поверхности

Остановимся теперь вкратце на исследовании общего вида решений уравнения (1.29) в зависимости от начальных данных, причем ограничимся только случаем $i_0 > 0$. Это исследование позволит нам определить все возможные формы свободной поверхности. Уравнение (1.29) имеет вид:

$$\frac{dH}{ds} = i_0 \frac{1 - \frac{K(H)}{K(H_0)}}{1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H)}}. \quad (1.29)$$

Очевидно, что надо различать три возможных случая в зависимости от того, больше, меньше или равна нормальная глубина критической.

Случай I. $H_0 > H_k$

При равномерном движении водоток находится в спокойном состоянии.

Форма свободной поверхности будет различной в зависимости от того, будет ли глубина больше нормальной или больше критической и меньше нормальной и, наконец, меньше критической.

а) $H > H_0$.

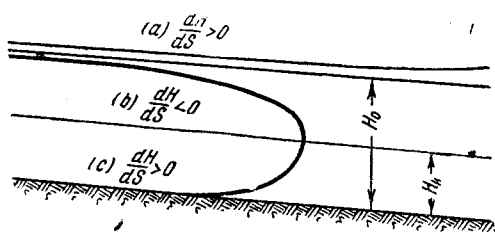
Из (1.29) следует, что $\frac{dH}{ds} > 0$. В этом случае вверх по течению кривая свободной поверхности приближается к прямой равномерного движения, а вниз

по течению имеет горизонтальную асимптоту; общий вид этой кривой изображен на фиг. 6. Эта кривая есть „кривая подпора“, возникающая при заграждении реки.

b) $H_k < H < H_0$.

В этом случае $\frac{dH}{ds} < 0$. Вверх по течению кривая свободной поверхности приближается к прямой равномерного движения, вниз по течению глубина убывает, причем при $H = H_k$ $\frac{dH}{ds} = \infty$. Эта кривая также изображена на фиг. 6.

Она называется „кривой спада“ и возникает в том случае, когда русло испытывает расширение или имеет место увеличение уклона дна. В том месте, в котором $H = H_k$, образуется прыжок понижения (водопад). На основании исследований, произведенных



Фиг. 6.

в § 4, можно заключить, что место, в котором $H = H_k$, обязательно является местом, в котором русло испытывает внезапное изменение формы или уклона.

c) $H < H_k$.

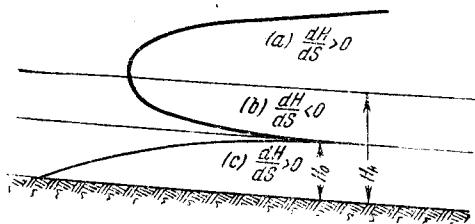
Водоток находится в бурном состоянии. В этом случае $\frac{dH}{ds} > 0$. Вверх по течению глубина убывает и стремится к нулю. Вниз по течению при H , стремящемся к H_k , $\frac{dH}{ds} \rightarrow \infty$. В этом случае образуется прыжок. Общий вид кривой изображен на фиг. 6. Эта кривая образуется, например, при истечении из-под щита в русло с малым уклоном.

Случай II. $H_0 < H_k$

При равномерном движении водоток находится в бурном состоянии. Опять нужно различать три возможных случая.

a) $H > H_k$.

Водоток находится в спокойном состоянии и $\frac{dH}{ds} > 0$. Вниз по течению свободная поверхность имеет горизонтальную асимптоту, а вверх по течению образуется прыжок, так как при $H = H_k$ $\frac{dH}{ds} = \infty$. Соответствующая кривая подпора схематически изображена на фиг. 7.



Фиг. 7.

b) $H_0 < H < H_k$.

Водоток находится в бурном состоянии и $\frac{dH}{ds} < 0$. Вниз по течению кривая

свободной поверхности приближается к кривой равномерного движения, вверх по течению образуется водопад.

с) $H < H_0$.

Водоток находится в бурном состоянии и $\frac{dH}{ds} > 0$. Вниз по течению кривая свободной поверхности стремится к кривой равномерного движения (фиг. 7). Вверх по течению глубина стремится к нулю.

Случай III. $H_0 = H_k$

Из уравнения (1.22) следует, что в этом случае всегда $\frac{dH}{ds} \geq 0$. В случае, когда смоченный периметр русла можно приближенно принять равным ширине русла на свободной поверхности,

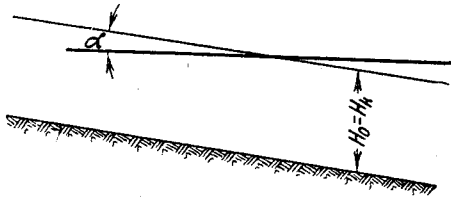
$$R = \frac{F}{B}$$

и

$$K(H) = \frac{Q_0^2}{C^2 \Lambda(H)}.$$

Если кроме того принять, что C^2 не зависит от H , то уравнение (1.29) может быть переписано в виде:

$$\frac{dH}{ds} = i_0 \frac{\Lambda(H) - \Lambda(H_0)}{\Lambda(H) - \Lambda(H_k)}; \quad (1.41)$$



Фиг. 8.

в частности, для параболических русел мы уже раньше преобразовали уравнение установившегося движения к этому виду (1.32).

Из уравнения (1.41) следует, что при $H_0 = H_k$ $\frac{dH}{ds} = i_0$, т. е. линия свободной поверхности является горизонтальной прямой (фиг. 8).

В заключение скажем несколько слов о построении кривых подпора и спада.

Уравнение (1.29) интегрируется простой квадратурой

$$s - s_1 = \frac{1}{i_0} \int_{H_1}^H \frac{1 - \frac{\Lambda(H_k)}{\Lambda(H)}}{1 - \frac{K(H)}{K(H_0)}} dH. \quad (1.42)$$

В общем случае интеграл (1.42) вычисляется приближенно при помощи формулы трапеций или формулы Симпсона. Однако, для ряда русел составлены подробные таблицы, облегчающие вычисления.

Рассмотрим параболические русла. Из выражений для H_0 и H_k в этом случае следует, что

$$H_k^{2n+1} = \frac{i_0 C^2 a}{g} H_0^{2n+1} = j H_0^{2n+1}$$

и что, следовательно, уравнение (1.32) можно переписать в виде:

$$\frac{dH}{ds} = i_0 \frac{H^{2n+1} - H_0^{2n+1}}{H^{2n+1} - jH_0^{2n+1}}. \quad (1.43)$$

Вводя обозначение

$$\eta = \frac{H}{H_0}, \quad (1.44)$$

можно преобразовать уравнение (1.43) к виду

$$\frac{i_0}{H_0} ds = d\eta + (1 - j) \frac{d\eta}{\eta^{2n+1} - 1}.$$

Откуда, интегрируя, имеем:

$$\frac{i_0}{H_0} (s - s_1) = \eta - \eta_1 + (1 - j) \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^{2n+1} - 1}. \quad (1.45)$$

Таблицы функции

$$B(\eta) = \int \frac{d\eta}{\eta^2 - 1}$$

составлены Брессом для $n=1$, Толкмитом для $n=\frac{3}{2}$ и затем Б. А. Бахметевым и Н. Н. Павловским для различных значений n . Эти таблицы приведены в приложении к руководствам Б. А. Бахметева [4, 5].