

Н.Н. Яненко

УДК

MÉTHODE A PAS FRACTIONNAIRES

RÉSOLUTIONS DE PROBLÈMES
POLYDIMENSIONNELS
DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

N.N. YANENKO

traduit par P.A. NEPOMIASTCHY



LIBRAIRIE ARMAND COLIN

103, bd S^t Michel, Paris-5^e



Cet ouvrage est publié
sous la direction
de M. LAUDET

INTRODUCTION

La méthode à pas fractionnaires se trouve être le sujet d'un véritable livre ; elle est née il y a quelques années et a eu depuis un développement très rapide comme méthode de construction de schémas économiques aux différences.

La méthode à pas fractionnaires permet de résoudre des problèmes qui ne peuvent être résolus par les schémas aux différences habituels — schémas de simple approximation où à chaque pas il faut vérifier les conditions de stabilité et de consistance. Ceci conduit à une grande simplicité de formules, mais le schéma devient moins souple, il contient moins de paramètres arbitraires et par là même il ne peut remplir toutes les conditions imposées. Au contraire, la méthode à pas fractionnaires, démembrant le passage d'une étape à une autre et ne nécessitant pas à chaque étape la vérification obligatoire des conditions de consistance à l'équation de départ et de stabilité, a à sa disposition un choix de paramètres qui permet la construction de schémas économiques et précis.

La méthode à pas fractionnaires se trouve être la réponse à un besoin né en calcul numérique — la création de schémas économiques simples de résolution des problèmes polydimensionnels de physique mathématique.

Issue du travail de base de Peaceman, Rachford et Douglas (1955), la méthode s'est élargie et approfondie grâce aux travaux de savants américains et soviétiques : Douglas, Rachford, Baker, Oliphant, Bagrinovsky, Godounov, Diakonov, Martchouk, Samarsky, etc.

A l'heure actuelle, la méthode à pas fractionnaires est un élément inséparable de la construction des schémas pour la résolution des problèmes polydimensionnels compliqués de physique mathématique.

Bien que la méthode à pas fractionnaires puisse encore beaucoup se développer dans l'avenir et qu'elle n'ait pas encore reçu de bases théoriques, elle apparaît déjà être non seulement un moyen de construction d'algorithmes optimaux mais aussi un instrument de recherche théorique sur les équations aux différences et les équations différentielles. Ce livre a pour base des conférences faites par l'auteur dans les Universités de l'Oural, de Tomsk, de Novosibirsk et du Kazakhstan de 1959 à aujourd'hui.

Ce livre essaie d'expliquer et, si possible, de donner un exposé unique des très nombreux schémas à pas fractionnaires dont on ne peut trouver la description que dans des journaux ou des recueils.

L'auteur a essayé de tenir compte, autant que possible, de tous les travaux ayant contribué au développement de la méthode à pas fractionnaires, mais évidemment l'interprétation du sujet n'est pas uniforme et reflète les goûts personnels de l'auteur. En particulier le livre ne parle pas de la méthode d'estimations a priori. L'auteur emploie des méthodes plus simples d'analyse harmonique de la convergence. Très superficiellement aussi, est donnée la théorie des critères locaux de convergence. L'attention de l'auteur s'est surtout portée sur les méthodes de construction de schémas efficaces.

Le livre reflète également les résultats personnels de l'auteur et de ses collègues de travail. Il est particulièrement agréable à l'auteur de se souvenir du travail effectué avec la collectivité des jeunes mathématiciens qui a étudié les premiers schémas implicites de désintégration pour la résolution des différents problèmes de physique mathématique et les a utilisés avec succès dans des applications numériques ; ce sont, en premier lieu, N. N. Anoutchyna, V. A. Enalsky, J. S. Jarikov, A. I. Zouev, A. N. Konovalov, V. B. Néouvajaïev, Y. Y. Pogodine, V. A. Soutchkov, V. D. Froloff.

En 1962 a eu lieu une discussion à laquelle ont pris part E. G. Diakonov, A. A. Samarsky, B. L. Rajdestvensky, qui a entraîné une compréhension plus profonde du rôle des conditions aux limites dans l'estimation de la précision des schémas à pas fractionnaires et a donné une impulsion à toute une série de travaux.

Le travail en commun et les très nombreuses discussions avec G. I. Martchouk et les chercheurs du Centre de Calcul de la Division Sibérienne de l'A. S. de l'U. R. S. S., Y. E. Boïarintsev, G. V. Demidov, V. P. Ilyin, B. G. Kouznetsov, M. M. Lavrentiev, V. V. Penenko, ont permis un grand élargissement des conséquences de la méthode à pas fractionnaires et de sa base théorique.

A tous ses camarades, l'auteur exprime sa reconnaissance.

Ce livre sera utile à tous les chercheurs qui veulent résoudre numériquement les problèmes polydimensionnels de la mécanique et de la physique et aussi aux étudiants des cours supérieurs de l'Université, spécialisés dans le calcul numérique.

L'auteur s'est décidé à la publication de ce livre en voyant le grand besoin pratique d'un manuel de ce genre. Il sera reconnaissant aux lecteurs de ce livre de lui indiquer les erreurs et les insuffisances possibles.

N. N. YANENKO
novembre 1965

INTRODUCTION A L'ÉDITION FRANÇAISE

L'auteur est très heureux que son livre sur la Méthode à pas fractionnaires soit édité en France. Ceci témoigne de l'intérêt que présente la méthode elle-même pour les mathématiciens français, et l'auteur espère que c'est également une marque d'estime pour la contribution des chercheurs soviétiques à cette méthode.

Si les travaux américains sont essentiellement groupés autour de la méthode des directions alternées (schéma de Peaceman, Rachford, Douglas) et de la méthode des corrections stabilisatrices de Douglas-Rachford, les travaux soviétiques ont créé et développé les schémas de désintégration et donné des formulations générales de la méthode à pas fractionnaires. La méthode de désintégration n'a pas seulement permis d'obtenir des schémas aux différences efficaces, elle a également permis de jeter un pont entre la théorie des schémas aux différences et la théorie des équations aux dérivées partielles.

L'auteur est particulièrement heureux de reconnaître que les mathématiciens français Lions et Temam ont apporté une contribution essentielle à la formulation variationnelle de la méthode de désintégration (d'éclatement) et à ses applications théoriques et pratiques. Il regrette de n'avoir pas eu le temps d'inclure dans le livre ces intéressants résultats et d'avoir dû se contenter d'une courte bibliographie des travaux français.

L'auteur remercie le traducteur de ce livre, P. Nepomiastchy, qui a fait au cours de ce travail des remarques intéressantes et qui a aimablement donné un bref aperçu des applications numériques des schémas à pas fractionnaires.

N. N. YANENKO
mai 1968

Ce livre a été traduit dans le cadre du diplôme d'ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique et d'Hydraulique de Toulouse (option Mathématiques Appliquées). La deuxième partie de notre travail ayant été l'étude du livre et la programmation de quelques schémas proposés par l'auteur, il m'a semblé intéressant d'inclure dans cette traduction, à la fin de certains paragraphes, les résultats numériques que nous avons obtenus sur l'équation de la chaleur.

Ces résultats ont été obtenus en utilisant l'ordinateur IBM 7044 de l'Institut du Calcul Numérique de la Faculté des Sciences de Toulouse.

L'étude du livre et la programmation des schémas ont été effectuées en collaboration avec mon camarade Claude Lemaréchal.

Je tiens à remercier Monsieur Roger Temam pour l'aide qu'il nous a apportée dans la réalisation de ce travail.

PIERRE NEPOMIASTCHY

1.1 Classe des problèmes étudiables

Problèmes de Cauchy dans un espace de Banach

Nous allons commencer notre cours en nous limitant d'abord à l'étude des systèmes différentiels de la forme :

$$\boxed{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \mathfrak{L}(D) u(x, t) + f(x, t)} \quad |1.1|$$

où

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \{u_i(x_1, \dots, x_m, t)\}_{i=1 \dots n} \\ f(x, t) &= \{f_i(x_1, \dots, x_m, t)\}_{i=1 \dots n} \end{aligned}$$

sont des vecteurs-fonctions de l'espace vectoriel d'argument $x = (x_1 \dots x_m)$ et de temps t ;

où $\mathfrak{L}(D)$, opérateur différentiel linéaire, est une matrice à coefficients variables,

$$D = \{D_i\}, D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1 \dots m.$$

L'équation (1.1), explicitée, s'écrit encore :

$$\left\{ \frac{(\partial u_i(x_1 \dots x_m, t))}{\partial t} = \sum_{j, a} a_{ij a_1 a_2 \dots a_m}(x_1 \dots x_m, t) D_1^{a_1} D_2^{a_2} \dots D_m^{a_m} u_j(x_1 \dots x_m, t) + f_i(x_1 \dots x_m, t) \right\} \quad |1.2|$$

avec $0 \leq a_k \leq q_k, k = 1 \dots m; i, j = 1 \dots n; a = \{a_1, \dots, a_m\}$

Pour le système (1.1) on peut poser le *problème de Cauchy* sur l'intervalle :

$$|x| < \infty \quad 0 \leq t \leq T < \infty$$

avec les conditions initiales : $u(x, 0) = u_0(x)$ [1.3]

ou alors le *problème mixte de Cauchy* dans le cylindre $\Omega = G \times H$ où G est un certain domaine dans l'hyperplan $t = 0$, de frontière γ , et $H = \{0 \leq t \leq T\}$.

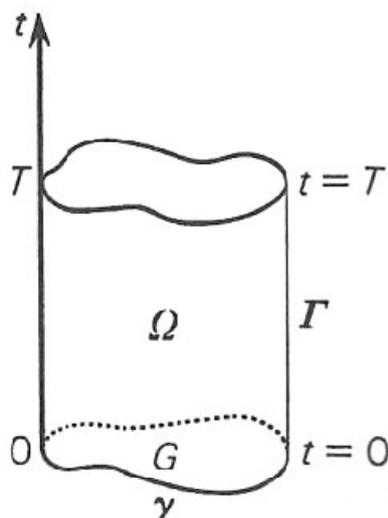


FIGURE 1.1.

Dans la seconde éventualité, aux conditions initiales données :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in G \quad [1.4]$$

il faut ajouter des conditions aux limites vérifiées sur la surface de séparation $\Gamma = \gamma \times H$ de l'espace Ω :

$$\lambda(D)u = \varphi(x, t) \quad [1.5]$$

Ici $\lambda(D)$ est un opérateur différentiel quelconque, dépendant des symboles $D_0 = \frac{\partial}{\partial t}$,

$D_1 \dots D_m$ et $\varphi(x, t)$ est un vecteur-fonction.

Dans ce qui va suivre, nous nous limiterons au problème de Cauchy dans l'intervalle $|x| \leq \infty, 0 \leq t \leq T < \infty$, étudiant le *problème mixte de Cauchy* seulement sur des exemples concrets. Ceci nous évitera l'obligation de rentrer dans l'analyse des conditions aux limites. Dans la plupart des cas le problème de Cauchy étudiable aura la propriété de périodicité, c'est-à-dire que les coefficients, le second membre $f(x, t)$, les conditions aux limites et par conséquent la solution, seront des fonctions périodiques de x .

Nous allons étudier le problème de Cauchy plus général pour lequel les conditions initiales se posent à l'instant $t_1, 0 \leq t_1 \leq T$, et il faut chercher la solution $u(x, t)$ du système (1.1) pour tous les $t, t \in [t_1, T]$ et telle que :

$$\lim_{t \rightarrow t_1} u(x, t) = u(x, t_1)$$

fonction initiale donnée.

Nous supposerons que le problème de Cauchy est résoluble, qu'il a une solution unique pour tous les $t \in [t_1, T]$ et que la solution $u(x, t)$ a toutes ses dérivées continues, vérifiant l'équation (1.2), si la fonction initiale $u(x, t_1)$ est suffisamment régulière.

Nous appellerons une telle solution *classique*.

Désignons par $u(t)$ la fonction $u(x, t)$ en considérant t comme un paramètre. La fonction $u(x, t)$ avec t fixé sera considérée comme un élément de l'ensemble des fonctions de x . La solution $u(x, t)$ du système (1.1) correspondra donc à une famille d'éléments à un seul paramètre $u(t)$. De même l'opérateur $\mathcal{L}(D)$ et la fonction $f(x, t)$ de (1.1) seront désignés par $\mathcal{L}(t, D)$ et $f(t)$.

Soit $u(t)$ une solution classique du problème de Cauchy homogène ($f = 0$) avec la condition initiale $u(t_1)$.

Avec les hypothèses faites, l'égalité :

$$u(t_2) = s(t_2, t_1) u(t_1) \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad |1.6|$$

pour les fonctions $u(t_1)$ suffisamment régulières définit l'opérateur linéaire de passage $s(t_2, t_1)$.

Nous supposerons qu'il existe un espace de Banach \mathcal{B} des fonctions de x dans lequel un certain ensemble de fonctions régulières définit une classe dense et que l'égalité (1.6) peut être étendue aux fonctions de \mathcal{B} . En vertu du théorème connu sur le prolongement des opérateurs, ceci est possible si l'opérateur $s(t_2, t_1)$ opère dans un espace de fonctions régulières. Toutes les mesures d'opérateurs seront prises avec la norme dans \mathcal{B} .

DÉFINITIONS :

— Le problème (1.1), (1.3) est dit *bien posé* si :

$$\|s(t, 0)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t \leq T \quad |1.7|$$

— Le système (1.1) est dit *correct* si :

$$\|s(t_2, t_1)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad |1.8|$$

— Le système (1.1) est dit *uniformément correct* si :

$$\|s(t_2, t_1)\| \leq e^{\alpha(t_2-t_1)} \quad |1.9|$$

pour tous les t_1, t_2 vérifiant $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, où α est une constante ne dépendant que de T .

Il est évident qu'un système uniformément correct est correct et que, si le système est correct, le problème de Cauchy est bien posé.

Dans ce qui va suivre, nous n'étudierons que les systèmes uniformément bien posés. La condition (1.8) fournit la loi de composition pour la famille restreinte des opérateurs $s(t_2, t_1)$:

$$s(t_3, t_1) = s(t_3, t_2) \cdot s(t_2, t_1) \quad |1.10|$$

L'égalité (1.10) est une *généralisation du principe de Huygens-Hadamard* : la résolution du problème de Cauchy dans les intervalles $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m]$

est équivalente à la résolution du problème de Cauchy dans l'intervalle $[t_0, t_m]$. Nous supposons aussi qu'est vérifiée l'hypothèse de *forte continuité* de l'opérateur $s(t_2, t_1)$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \| s(t + \tau, t) u_0 - u_0 \| = 0 \quad \forall u_0 \in \mathcal{B}, \forall t \quad |1.11|$$

La famille d'opérateurs $s(t_2, t_1)$ satisfaisant aux conditions (1.9), (1.10), (1.11) forme un semi-groupe¹. L'étude détaillée du problème de Cauchy dans un espace de Banach sera faite au chapitre 10.

1.2 Schémas homogènes

Soit

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n + F^n \quad |1.12|$$

un schéma aux différences à deux niveaux correspondant au système (1.1). Ici :

$$u^n(x) = \{u_i(x_1, \dots, x_m, n\tau)\}, \quad F^n(x) = \{F_i(x_1, \dots, x_m, n\tau)\}$$

sont des vecteurs-fonctions,

$\Lambda_0 = \Lambda_0(t, \tau, h, T)$, $\Lambda_1 = \Lambda_1(t, \tau, h, T)$, sont des opérateurs matriciels aux différences à coefficients variables.

$$T = \{T_\alpha\}; \quad \alpha = -q_\alpha, -q_\alpha + 1, \dots, q_\alpha;$$

les opérateurs de translation T_α étant définis par les formules :

$$\left. \begin{aligned} T_i u(x_1 \dots x_m) &= u(x_1 \dots, x_i + h_i, \dots, x_m) \\ T_{-i} u(x_1 \dots x_m) &= u(x_1 \dots, x_i - h_i, \dots, x_m) \end{aligned} \right\} (T_i = T_{-i}^{-1}) \quad |1.13|$$

Sous forme indicée, le schéma (1.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= \sum_{j, \beta} b_{ij \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}(x, t, \tau, h) T_1^{\beta_1} \dots T_m^{\beta_m} u_j^{n+1} \\ &+ \sum_{j, \beta} c_{ij \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} T_1^{\beta_1} \dots T_m^{\beta_m} u_j^n + F_i^n \quad |1.14| \end{aligned}$$

i variant de 1 jusqu'à n .

Les indices $\{\beta_s\}_{s=1 \dots m}$ sont des entiers positifs ou négatifs.

Introduisons une série de notions :

— Nous appellerons les schémas du type (1.12) *schémas homogènes* parce que l'approximation de (1.12) est indépendante du point x, t ².

1. A propos de la résolution du problème de Cauchy et de la théorie des semi-groupes [2-4]. Connaissances indispensables de l'analyse fonctionnelle [1], [72].

2. A propos des schémas homogènes, cf. [93].

— Le schéma du type (1.12) sera dit *explicite* si l'opérateur $E - \tau \Lambda_1$ s'explique par une matrice diagonale, *implicite* dans le cas contraire.

— L'opérateur Λ sera dit *singulier* si, pour toutes les fonctions régulières f , on a :

$$\| \Lambda f \| \geq A \cdot \left(\frac{1}{h^\alpha} \right)$$

avec $\alpha > 0$, $A > 0$, $h = \max h_i$ et A indépendant de h .

Si $|\beta_s| \leq Q$ où Q est indépendant de τ, h , on appellera les opérateurs Λ_0 et Λ_1 des opérateurs *bornés*. Remarquons que l'opérateur inverse d'un opérateur borné n'est pas, en général, un opérateur borné.

En pratique, les calculs d'après l'équation (1.12)

$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n + F^n \right)$ s'effectuent sur les points du maillage et la notation explicitée (1.14) doit être complétée par des indices *de mailles* :

$$\begin{aligned} & \frac{u_{ik_1 \dots k_m}^{n+1} - u_{ik_1 \dots k_m}^n}{\tau} \\ &= \sum_{j, \beta} b_{ij\beta_1 \dots \beta_m}^{n+1} u_{j, k_1 + \beta_1, \dots, k_m + \beta_m}^{n+1} + \sum_{j, \beta} c_{ij\beta_1 \dots \beta_m} u_{j, k_1 + \beta_1, \dots, k_m + \beta_m}^n + F_{ik_1 \dots k_m}^n \quad |1.15| \end{aligned}$$

où les indices $k_1 \dots k_m$ déterminent le point :

$$x_1 = k_1 h_1, \dots, x_m = k_m h_m$$

Dans l'étude théorique nous supposons que les opérateurs Λ_1, Λ_0 appartiennent au même espace que l'opérateur \mathcal{L} de (1.1) et que les fonctions $u^n(x)$ appartiennent à \mathcal{B} .

Posons pour (1.12) la condition initiale :

$$u_0(x) = \{ u_i(x_1 \dots x_m, 0) \} \quad |1.16|$$

Soit $u^n(x)$ une solution du problème homogène de Cauchy (1.12), (1.16) ($F^n = 0$). Alors l'égalité :

$$u^{n+1}(x) = c(\tau, h, t + \tau, t) u^n(x), \quad t = n\tau \quad |1.17|$$

définit l'opérateur aux différences de *passage* $c(\tau, h, t + \tau, t)$ et l'égalité :

$$u^n(x) = c(\tau, h, t_1, t_2) u^m(x) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = m\tau \\ t_2 = n\tau \end{array} \right\} 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad |1.18|$$

définit l'opérateur aux différences de *transfert* $c(\tau, h, t_1, t_2)$.

Nous poserons : $\left\{ \begin{array}{l} c_{n,m} = c(\tau, h, t_1, t_2) \text{ avec } t_1 = m\tau, t_2 = n\tau \\ c_n = c_{n,n-1} \end{array} \right.$

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Le problème de Cauchy (1.12), (1.16) est *correct* si :

$$\|c(\tau, h, t, 0)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t = n\tau \leq T, \quad \tau^2 + h^2 \leq \tau_0^2 \quad |1.19|$$

où τ_0 est une certaine constante suffisamment petite.

Le schéma (1.12)

— est *correct* si :

$$\|c(\tau, h, t_2, t_1)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_1 = m\tau \\ t_2 = n\tau \end{cases} \quad |1.20|$$

— est *uniformément correct* si :

$$\|c(\tau, h, t_2, t_1)\| \leq e^{\omega(t_2-t_1)}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_1 = m\tau \\ t_2 = n\tau \end{cases} \quad |1.21|$$

où ω est une constante ne dépendant que de T .

— est *stable* si :

$$\|c(\tau, h, t_2, t_1)\| \leq 1, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_1 = m\tau \\ t_2 = n\tau \end{cases} \quad |1.22|$$

— est *asymptotiquement stable* si :

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \|c(\tau, h, t_2, t_1)\| = 0 \quad |1.22'|$$

— est *fortement stable* si :

$$\|c(\tau, h, t + \tau, t)\| \leq 1 - \varepsilon(\tau, h, T), \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau, h \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad |1.23|$$

Ces définitions se transposent aisément dans le cas des pas variables :

$$\tau_1 = t_1 - t_0, \quad \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \quad \tau_n = t_n - t_{n-1}$$

DÉFINITION 1

Le schéma (1.12) est *consistant* à l'équation (1.1) si :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\| [c(\tau, h, t + \tau, t) - s(t + \tau, t)] u(x, t) \|}{\tau} = 0 \quad |1.24|$$

et si cette convergence est *uniforme* pour tout t , $0 \leq t \leq T$, pour les solutions régulières $u(x, t)$ des problèmes (1.1) et (1.3).

DÉFINITION 2

La solution $u^n(x)$ des problèmes (1.12), (1.16) *converge* vers la solution $u(x, t)$ des problèmes (1.1), (1.3) si, posant $t = n\tau$, on a :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|u^n(x) - u(x, n\tau)\| = \lim_{\tau \rightarrow 0} \| [c(\tau, h, n\tau, 0) - s(n\tau, 0)] u_0 \| = 0 \quad |1.25|$$

et si cette convergence est uniforme dans l'intervalle $[0, T]$, $\forall u_0 \in \mathcal{B}^1$.

1. Nous avons défini la convergence pour $t = n\tau$. Mais pour la restriction de $c_{n,m}$ on a : convergence pour $t = n\tau \Rightarrow$ convergence pour tout t .

Les définitions de la correction, de la consistance et de la convergence exigent que l'on indique la loi de passage à la limite :

$$h = h(\tau) \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} h(\tau) = 0 \quad |1.26|$$

DÉFINITION 3

Le schéma (1.12) est *absolument correct* s'il est *correct* pour n'importe quelle loi de passage à la limite $h, \tau \rightarrow 0$, c'est-à-dire que la condition (1.20) est vérifiée à l'intérieur de tout le voisinage :

$$\tau^2 + h^2 \leq \tau_0^2 \quad |1.27|$$

pour un τ_0 suffisamment petit.

On dit que le schéma (1.12) est *correct sous condition* dans le cas contraire, c'est-à-dire si la condition (1.20) n'est pas remplie pour une loi de passage à la limite quelconque. Dans ce cas la condition (1.20) est vérifiée dans un certain voisinage partiel de 0 dans le plan (τ, h) dont la frontière passe par l'origine.

On définit de même la distinction entre *absolu* et *sous condition* pour la correction uniforme, la stabilité et la forte stabilité.

DÉFINITION 4

Le schéma (1.12) est *absolument consistant* à l'équation (1.1) si la condition (1.24) est vérifiée dans le voisinage (1.27) et *consistant sous condition* dans le cas contraire. On définit de même la *convergence absolue* et la *convergence sous condition*.

THÉORÈME DE CONVERGENCE ¹

Hypothèses :

- 1) Les problèmes de Cauchy différentiel et aux limites sont corrects.
- 2) L'opérateur $\Lambda_1 + \Lambda_0$ approche \mathfrak{L} ($\Lambda_1 + \Lambda_0 \sim \mathfrak{L}$).
- 3) $\| (E - \tau \Lambda_1)^{-1} \| \leq N(T)^2$.

Conclusion :

La solution du problème de Cauchy aux différences (1.12), (1.16) converge vers la solution du problème de Cauchy différentiel (1.1), (1.3).

1. Les conditions analogues de convergence ont été obtenues pour la première fois par V. S. Riabenkim et N. N. Meymanom ([5], [6]). Pour simplifier, nous nous sommes contentés d'étudier le cas $f = F = 0$.

2. Ici, ainsi que dans tout le reste du livre, E désigne l'opérateur identité (N.d.T.).

DÉMONSTRATION

Soit : $u(x, t) \in \mathcal{C}_q$ la solution des problèmes (1.1), (1.3) correspondant à la condition initiale $u_0(x) \in \mathcal{C}_q$ et $u^n(x)$ la solution des problèmes (1.12) (1.16) correspondant à la même fonction.

La grandeur :

$$V^n(x) = u^n(x) - u(x, n\tau) \quad |1.28|$$

vérifie l'équation aux différences :

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} = \Lambda_1 V^{n+1} + \Lambda_0 V^n + R_{n+1} \quad |1.29|$$

où

$$R_{n+1} = - \left\{ \frac{u[x, (n+1)\tau] - u(x, n\tau)}{\tau} - \Lambda_1 u[x, (n+1)\tau] - \Lambda_0 u(x, n\tau) \right\} \quad |1.30|$$

$$V^0 = u_0(x) - u(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \quad |1.31|$$

par définition de $u_0(x)$.

Pour n fixé, $\lim_{\tau \rightarrow 0} R_{n+1} = - \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - \mathcal{L} u_0 \right)$ en utilisant la condition $\mathcal{L} \sim \Lambda_1 + \Lambda_0$

et comme u_0 est solution de l'équation $\frac{\partial u_0}{\partial t} = \mathcal{L} u_0$, $\lim_{\tau \rightarrow 0} R_{n+1} = 0 \forall n$ fini,

par conséquent $\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\max_n \| R_n \| \right] = 0$. |1.32|

Écrivons l'équation (1.29) sous la forme :

$$V^{n+1} = c_{n+1} V^n + \lambda_{n+1} \quad |1.33|$$

$$c_{n+1} = (E - \tau \Lambda_1)^{-1} (E + \tau \Lambda_0); \quad \lambda_{n+1} = \tau (E - \tau \Lambda_1)^{-1} R_{n+1} \quad |1.34|$$

En posant $c_{n,\alpha} = \prod_{i=\alpha+1}^n c_i$, on voit facilement (avec $c_{nn} = 1$) que

$$V^n = c_{n,0} V^0 + \sum_{\alpha=1}^n c_{n,\alpha} \lambda_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n c_{n\alpha} \lambda_\alpha \quad |1.35|$$

(puisque $V^0 = 0$ d'après (1.31)).

De la formule (1.35), on déduit que :

$$\| V^n \| \leq \sum_{\alpha=1}^n \| c_{n,\alpha} \| \cdot \| \lambda_\alpha \| \quad |1.35 a|$$

or le problème de Cauchy est *correct* donc $c_{n,\alpha}$ opérateur de passage de V^n à $V^{n-\alpha}$ vérifie :

$$\| c_{n,\alpha} \| \leq M \quad \forall \alpha \quad |1.35 b|$$

$$\| \lambda_\alpha \| = \| \tau (E - \tau \Lambda_1)^{-1} R_\alpha \| \leq \tau N \| R_\alpha \| \quad |1.35 c|$$

d'après la troisième hypothèse, on a par conséquent :

$$\| \lambda_\alpha \| \leq \tau N \max_n \| R_n \| \quad |1.35 d|$$

$$\left. \begin{array}{l} |1.35 a| \\ |1.35 b| \\ |1.35 d| \end{array} \right\} \Rightarrow \| V^n \| \leq \sum_{\alpha=1}^n \tau MN \max_n \| R_n \| = n \tau MN \max_n \| R_n \| \\ = t MN \max_n \| R_n \| \quad |1.36|$$

et comme $\lim_{\tau \rightarrow 0} \max \| R_0 \| = 0$ et que $t \leq T$,

on a :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \| V^n \| = 0 \quad |1.37|$$

pour $t \in [0, T]$, *c.q.f.d.*

THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE :

Si le schéma (1.12) est consistant à l'équation (1.1), pour que la solution $u_n(x)$ du problème (1.12), (1.16) converge dans \mathcal{B} vers la solution $u(x, t)$ du problème correct (1.1), (1.3) il faut et il suffit que le problème (1.12), (1.16) soit correct.

La correction du problème aux différences apparaît donc comme une exigence indépendante, ne découlant pas des moyens d'approximation.

Montrons-le sur un exemple d'équation à coefficients constants.

Soit
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}(D) u \quad |1.38|$$

une équation à coefficients constants où u est une fonction scalaire de $x_1 \dots x_m, t$,

et
$$\mathcal{L}(D) = \sum_a a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} \quad |1.39|$$

est un polynôme d'opérateurs différentiels D_i .

Dans ce cas, le critère de correction simple est vérifié.

Soit u la fonction :

$$u = u_0 e^{\omega t + ikx}, \quad u_0 = C^te \quad |1.40|$$

k vecteur à composantes entières, kx étant un produit scalaire.

Pour que la fonction (1.40) soit solution de (1.38), il faut et il suffit que ω et k vérifient l'équation caractéristique (encore appelée *équation de dispersion*) :

$$\omega = \mathcal{L}(ik) \quad |1.41|$$

1. Le théorème d'équivalence a été démontré par Lax [3], [4] dans le cas des équations homogènes et étendu au cas des équations non homogènes par Richtmyer [7].

Le système (1.38) est correct dans $L_2 [-\Pi, +\Pi]$ si et seulement si :

$$\operatorname{Re} \omega(k) \leq \mu_1 \quad |1.42|$$

pour tous les k , où μ_1 est une constante indépendante de k .

Soit
$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \mathfrak{L} \left(\frac{\Delta}{h} \right) u^n \quad |1.43|$$

un schéma homogène explicite consistant à (1.38) où $\frac{\Delta}{h}$ est un certain approximant de D , par exemple :

$$\frac{\Delta_i}{h_i} = \frac{T_i - E}{h_i} \sim D_i$$

Alors (1.40) peut être solution de (1.43) avec les conditions (équations de dispersion aux différences) :

$$\begin{aligned} \frac{e^{\omega\tau} - 1}{\tau} &= \mathfrak{L} \left(\frac{e^{ikh} - 1}{h} \right) \\ &= \sum_a a_{a_1 \dots a_m} \left(\frac{e^{ik_1 h_1} - 1}{h_1} \right)^{a_1} \dots \left(\frac{e^{ik_m h_m} - 1}{h_m} \right)^{a_m} \end{aligned} \quad |1.44|$$

Une condition nécessaire et suffisante de correction du schéma (1.43) est de nouveau :

$$\operatorname{Re} \omega(\tau, h, k) \leq \mu_2 \quad |1.45|$$

où cette fois ω est défini par (1.44), et où μ_2 ne dépend pas de k, τ, h .

Pour k borné ($k \leq K$), on a :

$$\lim_{\tau, h \rightarrow 0} \omega(\tau, h, k) = \omega(k) = \mathfrak{L}(ik) \quad |1.46|$$

et par conséquent pour les classes de fonctions développables en série de Fourier, les équations de dispersion (1.44) approchent l'équation (1.41) et le schéma aux différences (1.43) est correct.

Cependant, la situation est différente en pratique : τ, h sont petits mais finis et k aussi grand que l'on veut ou suffisamment grand¹.

On déduit de là que $\omega(\tau, h, k)$ s'éloigne autant que l'on veut de $\omega(k)$ et la condition (1.45) ne se déduit pas de la condition (1.42).

L'analyse harmonique de la stabilité s'avère être très commode en pratique. Contrairement aux schémas dans lesquels on examine une perturbation des conditions initiales pour un point particulier du maillage et l'on analyse sa diffusion dans l'espace

1. Si le schéma aux différences s'étudie dans le même ensemble \mathcal{B} que le problème de Cauchy alors k est aussi grand que l'on veut. Si le schéma aux différences s'étudie dans un espace de fonctions discrètes, alors $k \sim \frac{1}{h}$.

(x_1, \dots, x_m, t) , dans l'analyse harmonique on examine la perturbation initiale de type harmonique :

$$\delta u = \delta u_0 \exp \left(i \sum_{j=1}^m k_j x_j \right)$$

et sa diffusion en découle.

Le critère harmonique de stabilité peut être alors formulé de la façon suivante : si l'amplitude de chaque perturbation harmonique ne grandit pas plus vite que $e^{\mu t}$, alors le schéma est correct.

Une perturbation ultérieure dans les données initiales ou dans le processus de calcul (erreur d'arrondi) de la forme $e^{ik_1 x_1}$ s'appellera simplement erreur sur x_1 , une perturbation de la forme $e^{ik_2 x_2}$ sera une erreur sur x_2 , etc.

De cette façon, les schémas aux différences doivent satisfaire à deux conditions indépendantes :

1. Consistance.
2. Correction.

Comme nous le verrons plus loin, ces deux conditions ne sont pas seulement indépendantes mais dans une certaine mesure sont assez souvent en contradiction.

A part les conditions de consistance et de correction qui sont indispensables, les schémas aux différences doivent encore vérifier une série de conditions qui ont un caractère moins catégorique mais qui sont pratiquement indispensables.

En premier lieu on trouve l'économie du schéma, le critère de l'économie étant le temps machine. L'économie d'un schéma aux différences n'est pas seulement un moyen de gagner du temps machine, c'est dans certains cas une condition indispensable pour que la réalisation du schéma sous forme de programme soit possible.

Dans l'intégration des équations non linéaires aux dérivées partielles, les critères de consistance et de correction se compliquent sérieusement, ainsi que les conditions de conservation¹.

On pourrait multiplier ces conditions mais déjà sans cela il apparaît clairement que la construction de bons schémas aux différences est un problème très complexe.

1.3 Exemples

Nous allons illustrer cette introduction par des exemples.

Nous allons étudier quatre schémas d'intégration pour les équations de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = C^{te} \neq 0 \quad |1.47|$$

1. Un schéma aux différences est appelé *conservatif* si les conditions de conservation sont pour lui des identités.

1.3.1 Schéma de la croix (schéma de Richardson)

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^n$$

$$\Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1} \quad |1.48|$$

Il est facile de vérifier que l'approximation est du second ordre.

Posons $\varrho = e^{\omega\tau}$.

Alors l'équation de dispersion pour le schéma (1.48) s'écrit :

$$\varrho^2 + 8r \sin^2 \left[\frac{kh}{2} \right] \varrho - 1 = 0 \quad \text{avec } r = \frac{a^2 \tau}{h^2} \quad |1.49|$$

les solutions de l'équation du second degré (1.49) sont :

$$\varrho_{1,2} = -4r \sin^2 \frac{kh}{2} \pm \sqrt{\left(4r \sin^2 \frac{kh}{2}\right)^2 + 1}$$

La norme de l'opérateur de passage est :

$$4r + \sqrt{1 + (4r)^2}$$

Pour τ, h quelconques, le schéma (1.48) est absolument instable. Par conséquent, le schéma de la *croix* est absolument consistant, mais est absolument instable.

1.3.2 Schéma du losange (schéma de Dufort et Frankel)

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{a^2}{h^2} [T_1 u^n + T_{-1} u^n - (u^{n-1} + u^{n+1})] \quad |1.50|$$

On peut mettre le schéma sous la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{a^2}{h^2} \Delta_1 \Delta_{-1} u^n - \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} \quad |1.50 a|$$

L'équation de dispersion a alors la forme :

$$\varrho^2 - \frac{4r \cos kh}{1 + 2r} + \frac{2r - 1}{2r + 1} = 0$$

D'où :

$$\varrho = \frac{2r \cos kh \mp \sqrt{[2r \cos(kh)]^2 - 4r^2 + 1}}{2r + 1} = \frac{2r \cos kh \mp \sqrt{1 - \varepsilon}}{2r + 1}$$

avec $\varepsilon = 4r^2 \cdot \sin^2 kh \geq 0$

Si $\varepsilon > 1$, les racines ϱ_1 et ϱ_2 sont complexes conjuguées de module :

$$\sqrt{\frac{2r-1}{2r+1}} < 1$$

Si $\varepsilon \leq 1$, alors $\sqrt{1-\varepsilon} = \theta \leq 1$,

et

$$|\varrho| = \left| \frac{2r \cos kh \mp \theta}{2r+1} \right| \leq 1$$

Par conséquent, le schéma du *losange* est absolument stable.

Vérifions la consistance :

L'utilisation de (1.50) nous montre que le schéma du losange est consistant à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Avec la condition-limite : $\frac{a^2 \tau}{h^2} = \lambda = \text{const.}$,

le schéma de *losange* est consistant à l'équation de la chaleur (1.47).

Avec la condition-limite : $\frac{a \tau}{h} = \mu = \text{const.}$,

le schéma du *losange* est consistant à l'équation du type hyperbolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad |1.51|$$

Par conséquent, le schéma du *losange* est un schéma absolument stable et explicite, non-absolument consistant de l'équation de la chaleur.

1.3.3 Schéma explicite à deux niveaux

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^n \quad |1.52|$$

L'équation de dispersion a la forme :

$$\varrho = 1 - 4r \sin^2 \frac{kh}{2} \quad |1.53|$$

Le schéma (1.52) est correct si :

$$r = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad |1.54|$$

c'est-à-dire qu'il est *stable sous condition*.

Il est facile de voir que le schéma (1.52) est absolument consistant à (1.47).
 Par conséquent, le schéma (1.52) est absolument consistant à l'équation (1.47) mais est *stable sous condition*.

1.3.4 Schéma implicite à deux niveaux (schéma de Crank-Nicholson)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{a^2}{h^2} \Delta_1 \Delta_{-1} [\alpha u^{n+1} + (1 - \alpha) u^n], \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad |1.55|$$

l'équation de dispersion a la forme :

$$\varrho = \frac{1 - 4r(1 - \alpha) \sin^2 \frac{kh}{2}}{1 + 4r\alpha \sin^2 \frac{kh}{2}}$$

Il est clair que le schéma (1.55) est absolument consistant à (1.47).

Pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$, (1.55) est également stable dans L_2 .

Pour $\alpha = 1$, le schéma (1.55) est absolument stable dans \mathcal{C} , c'est-à-dire qu'il satisfait le principe du maximum.

Pour $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $r \leq \frac{1}{2(1 - 2\alpha)}$, le schéma est stable dans L_2 .

L'étude d'exemples de schémas absolument corrects et consistants a toujours conduit à des schémas implicites. Apparemment, ceci est vrai dans tous les cas.

L'utilisation des schémas à la fois absolument corrects et absolument stables rend le calcul particulièrement commode.

NOTE DU TRADUCTEUR

Nous avons programmé le schéma (1.55) en Fortran double précision; le domaine est le carré $[0,1] \times [0,1]$; la solution exacte $u(x, t) = \exp(x + a^2t)$; Pour $a = 1$, $a = 1/2$ ($a = 1/2$ donne la précision maximum), nous avons obtenu les résultats suivants ($N = 1/h$, $NT = 1/\tau$, $t_{\max} = 1$):

$N \backslash NT$	50	100	150	200	250
10	0,18 10^{-3}	0,173 10^{-3}	0,172 10^{-3}	0,171 10^{-3}	0,171 10^{-3}
20	0,50 10^{-4}	0,45 10^{-4}	0,44 10^{-4}	0,43 10^{-4}	0,43 10^{-4}
30	0,26 10^{-4}	0,21 10^{-4}	0,20 10^{-4}	0,19 10^{-4}	0,19 10^{-4}
40	0,17 10^{-4}	0,12 10^{-4}	0,11 10^{-4}	0,11 10^{-4}	0,11 10^{-4}
50	0,14 10^{-4}	0,87 10^{-5}	0,77 10^{-5}	0,73 10^{-5}	0,72 10^{-5}
60	0,12 10^{-4}	0,65 10^{-5}	0,55 10^{-5}	0,52 10^{-5}	0,50 10^{-5}
70	0,19 10^{-4}	0,52 10^{-5}	0,43 10^{-5}	0,39 10^{-5}	0,38 10^{-5}
80	0,97 10^{-5}	0,44 10^{-5}	0,34 10^{-5}	0,31 10^{-5}	0,29 10^{-5}
90	0,91 10^{-5}	0,38 10^{-5}	0,29 10^{-5}	0,25 10^{-5}	0,24 10^{-5}
100	0,87 10^{-5}	0,34 10^{-5}	0,25 10^{-5}	0,21 10^{-5}	0,20 10^{-5}
110	0,84 10^{-5}	0,31 10^{-5}	0,22 10^{-5}	0,18 10^{-5}	0,17 10^{-5}
130	0,80 10^{-5}	0,27 10^{-5}	0,18 10^{-5}	0,14 10^{-5}	0,13 10^{-5}
150	0,78 10^{-5}	0,25 10^{-5}	0,15 10^{-5}	0,12 10^{-5}	0,70 10^{-5}
170	0,76 10^{-5}	0,23 10^{-5}	0,13 10^{-5}	0,10 10^{-5}	0,87 10^{-6}
190	0,75 10^{-5}	0,22 10^{-5}	0,125 10^{-5}	0,91 10^{-6}	0,75 10^{-6}
200	0,74 10^{-5}	0,21 10^{-5}	0,120 10^{-5}	0,86 10^{-6}	0,71 10^{-6}
250	0,73 10^{-5}	0,20 10^{-5}	0,10 10^{-5}	0,71 10^{-6}	0,55 10^{-6}
500	0,70 10^{-5}	0,18 10^{-5}	0,84 10^{-6}	0,50 10^{-6}	0,34 10^{-6}

Ce tableau indique en fonction de N et NT l'erreur absolue moyenne, c'est-à-dire

$$\frac{1}{N \cdot NT} \sum_{n=1}^{NT} \sum_{i=0}^N |u_i^n - \exp(ih + a^2n\tau)|$$

le temps machine est de l'ordre de $N \cdot NT$.

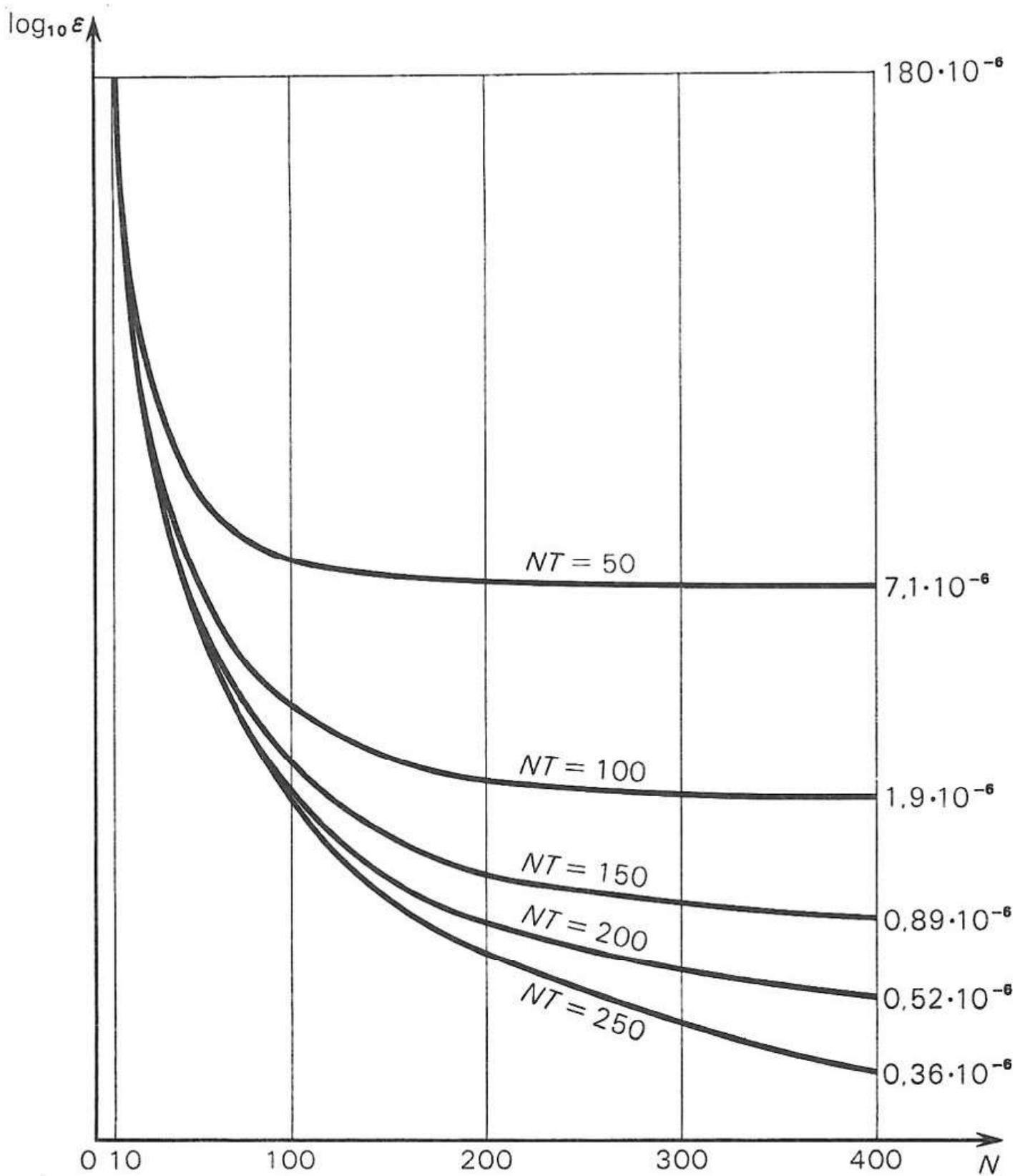


FIGURE 1.2. Schéma de CRANK-NICHOLSON en FORTRAN double-précision. $a = x_{\max} = t_{\max} = 1$; solution exacte = $\exp(x + a^2 t)$
 Courbes donnant l'erreur absolue moyenne (en coordonnées semi-logarithmiques) en fonction de $N = \frac{1}{h}$, avec $NT = \frac{1}{\Delta t}$ constant.

Méthode de factorisation (récurrence)

Pour la réalisation du schéma implicite (1.55), on peut appliquer la méthode de factorisation qui consiste à considérer l'opérateur du second ordre $E - \alpha r \Delta_1 \cdot \Delta_{-1}$ comme le produit de deux opérateurs du premier ordre. Pour l'équation aux différences du second ordre, par rapport à la variable d'espace (i indice de la variable d'espace), on a :

$$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = f_i, \quad i = 1 \dots N \quad |1.56|$$

les formules de récurrence ont la forme :

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad u_i = X_i u_{i+1} + Y_i \\ b) \quad X_i = -\frac{C_i}{B_i + A_i X_{i-1}}, \quad Y_i = \frac{f_i - A_i Y_{i-1}}{B_i + A_i X_{i-1}} \end{array} \right\} |1.57|$$

Pour le schéma (1.55), posant $u_i^{n+1} = u_i$, on a :

$$A_i = C_i = -\alpha r; \quad B_i = 1 + 2\alpha r; \quad f_i = [E + (1 - \alpha) r \Delta_1 \Delta_{-1}] u_i^n \quad |1.58|$$

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} X_i = \frac{\alpha r}{(1 + 2\alpha r) - \alpha r X_{i-1}} = \frac{1}{\frac{1 + 2\alpha r}{\alpha r} - X_{i-1}} = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\alpha r}\right) - X_{i-1}} \\ Y_i = \frac{f_i + \alpha r Y_{i-1}}{(1 + 2\alpha r) - \alpha r X_{i-1}} = \frac{Y_{i-1} + \frac{1}{\alpha r} f_i}{\left(2 + \frac{1}{\alpha r}\right) - X_{i-1}} = X_i \left[Y_{i-1} + \frac{1}{\alpha r} f_i \right] \end{array} \right\} |1.58 a|$$

Les grandeurs X_0, Y_0 se déterminent à l'aide des conditions aux limites. Par exemple, si pour l'équation (1.55) on résout le problème aux limites suivant :

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad b) \quad u(1, t) = 1 \\ c) \quad u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right\} |1.59|$$

alors X_0, Y_0 sont déterminés par la relation :

$$u_0 = u_1 X_0 + Y_0 \quad |1.60|$$

Pour vérifier la condition aux limites (1.59 a), il suffit de prendre :

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = 0 \quad |1.61|$$

Après cela, à l'aide de l'équation (1.57), on détermine X_i, Y_i par récurrence.

De la condition (1.59 b) on tire u_N et de l'égalité (1.59 a) prise de la droite vers la gauche on détermine u_i .

Il est facile de voir que le schéma récurrent (1.57), (1.58 a) est *spatialement stable* c'est-à-dire que dans le calcul par récurrence de X_1, Y_1, u_1 l'erreur ne grandit pas. L'algorithme par récurrence est très efficace, le nombre d'opérations à effectuer à chaque pas du schéma (1.55) étant seulement cinq fois plus grand que le nombre d'opérations à effectuer pour un pas du schéma simple (1.52).

Tenant compte de ceci, on voit que l'application d'un schéma implicite devient économiquement rentable si $\frac{\tau_1}{\tau_2} > 5$ où τ_1 est le pas du schéma explicite et τ_2 le pas du schéma implicite.

NOTE DU TRADUCTEUR

La méthode de récurrence exposée ici dans le cas de l'équation de la chaleur à une dimension avec u/Σ donné peut en fait s'appliquer chaque fois que l'on peut mettre chaque étape du schéma à pas fractionnaires sous la forme :

$$\left\{ \frac{u^{n+r/m} - u^{n+\frac{r-1}{m}}}{\tau} = \Lambda_{r1} u^{n+r/m} + \Lambda_{r0} u^{n+\frac{r-1}{m}} + F_r^{n+\frac{r-1}{m}} \right\}_{r=1\dots m}$$

à condition que chaque schéma partiel ne soit implicite que par rapport à une seule variable spatiale (c'est-à-dire si Λ_{r1} n'opère que sur une seule variable). Dans ce cas, en ce qui concerne

$u_{i,j,\dots,l}^{n+\frac{r}{m}}$, un seul indice spatial est variable (par exemple i) et on peut poser : $u_{i,j,\dots,l}^{n+\frac{r}{m}} = u_i$.

Posant alors : $f_i = u_{i,j,\dots,l}^{n+\frac{r-1}{m}} + \tau \Lambda_{r0} u_{i,j,\dots,l}^{n+\frac{r-1}{m}} + \tau F_r^{n+\frac{r-1}{m}}$, on peut mettre chaque schéma partiel sous la forme :

$$A_i u_{i+\alpha} + B_i u_{i+(\alpha-1)} + \dots + C_i u_i + \dots + D_i u_{i-\alpha} = f_i \quad (a)$$

(Si $2\alpha + 1$ est le nombre de points que nécessite l'approximation de Λ_{r1}).

Voici quelques exemples de l'application de la méthode de Yanenko généralisée.

Équation polydimensionnelle de la chaleur avec u/Σ donné :

A chaque étape du schéma, on a une récurrence à 3 termes sur les u_i avec u_0 et u_N connus : on peut donc appliquer à chaque étape l'algorithme proposé par Yanenko.

Équation de la chaleur avec $\frac{du}{dn} / \Sigma$ donné :

(a) s'écrit ici :

$$-a r u_{i+1} + (1 + 2 a r) u_i - a r u_{i-2} = f_i \quad (b)$$

On a bien une récurrence à 3 termes, mais on ne connaît ni u_0 , ni u_N mais deux relations de la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_0 &= \beta_1 u_1 \\ \alpha_2 u_{N-1} &= \beta_2 u_N \end{aligned} \quad (c)$$

Si r est constant (équation de la chaleur à coefficients constants), on peut appliquer la méthode suivante :

Toute suite récurrente à trois termes dépendant linéairement des deux premiers termes, on peut prendre u_i sous la forme :

$$u_i = C_i u_0 + D_i u_1 + E_i \quad (p)$$

Les coefficients C_i , D_i et E_i étant tels que la suite u_i vérifie (b) et les valeurs u_0 et u_1 étant choisies de manière à vérifier (c).

Pour déterminer C_i , D_i et E_i , c'est-à-dire pour trouver la solution générale de (b), on peut donner à u_0 et u_1 des valeurs arbitraires :

$u_0 = u_1 = 0$ permet de calculer (u_i) à l'aide de (b) et (d) donne alors : $E_i = u_i$

$u_0 = 1; u_1 = 0$ permet de calculer (u_i) à l'aide de (b) et (d) donne alors : $C_i = u_i - E_i$

$u_0 = 0; u_1 = 1$ permet de calculer (u_i) à l'aide de (b) et (d) donne alors : $D_i = u_i - E_i$

Les C_i , D_i et E_i étant déterminés, on trouve u_0 et u_1 en écrivant qu'ils vérifient (c) :

$$\alpha_1 u_0 = \beta_1 u_1 \Rightarrow \alpha_1 (C_0 u_0 + D_0 u_1 + E_0) = \beta_1 (C_1 u_0 + D_1 u_1 + E_1)$$

$$\alpha_2 u_{N-1} = \beta_2 u_N \Rightarrow \alpha_2 (C_{N-1} u_0 + D_{N-1} u_1 + E_{N-1}) = \beta_2 (C_N u_0 + D_N u_1 + E_N)$$

système linéaire permettant de calculer u_0 et u_1 , puis on calcule les (u_i) à l'aide de (d).

Équation biharmonique : on connaît u_0, u_1, u_{N-1}, u_N et la formule de récurrence est de la forme :

$$a u_{i+2} + b u_{i+1} + c u_i + d u_{i-1} + e u_{i-2} = f_i \quad (a)$$

Posons :
$$u_i = X_i u_{i+1} + Y_i u_{i+2} + Z_i \quad (\beta)$$

En écrivant $u_{i-1} = X_{i-1} u_i + Y_{i-1} u_{i+1} + Z_{i-1}$

$$u_{i-2} = [X_{i-2} X_{i-1} + Y_{i-2}] u_i + X_{i-2} Y_{i-1} u_{i+1} + X_{i-2} Z_{i-1} + Z_{i-2}$$

et en reportant dans (a), on trouve :

$$u_i = -\frac{b + dY_{i-1} + eX_{i-2} Y_{i-1}}{c + dX_{i-1} + e(X_{i-2} X_{i-1} + Y_{i-2})} u_{i+1} - \frac{a}{c + dX_{i-1} + e(X_{i-2} X_{i-1} + Y_{i-2})} u_{i+2} + \frac{f_i - dZ_{i-1} - e(X_{i-2} Z_{i-1} + Z_{i-2})}{c + dX_{i-1} + e(X_{i-2} X_{i-1} + Y_{i-2})}$$

soit, par comparaison avec (β) :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i = \frac{-b + dY_{i-1} + eX_{i-2} Y_{i-1}}{c + dX_{i-1} + e(X_{i-2} X_{i-1} + Y_{i-2})} \\ Y_i = -\frac{a}{c + dX_{i-1} + e(X_{i-2} X_{i-1} + Y_{i-2})} \\ Z_i = \frac{f_i - dZ_{i-1} - e(X_{i-2} Z_{i-1} + Z_{i-2})}{c + dX_{i-1} + e(X_{i-2} X_{i-1} + Y_{i-2})} \end{array} \right.$$

Pour amorcer la récurrence on peut prendre, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = Y_0 = 0; Z_0 = u_0 \\ X_1 = Y_1 = 0; Z_1 = u_1 \end{array} \right.$$

Le problème est différent si l'on s'intéresse à l'équation polydimensionnelle de la chaleur.

Étudions, par exemple, l'équation de la chaleur à deux dimensions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad |1.62|$$

dans le parallélépipède : $x \in [0, 1], y \in [0, 1], t \in [0, T]$

et posons pour cette équation le premier problème aux limites de Cauchy :

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G$$

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \gamma$$

où $G = \{(x, y) / x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$, γ la frontière de G .

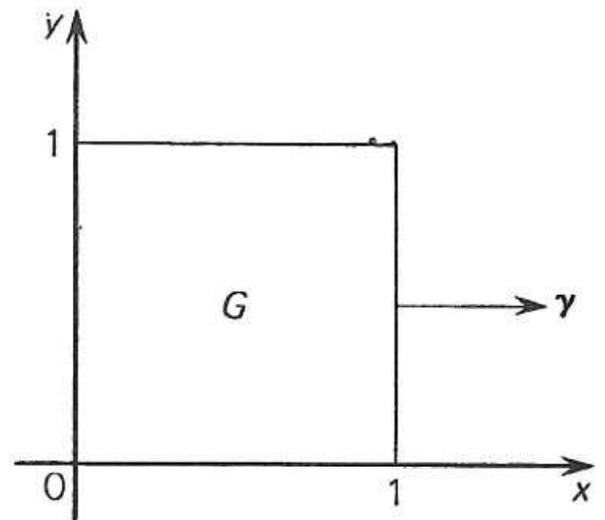


FIGURE 1.3.

Comme pour le problème à une dimension, appliquons le schéma implicite homogène :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda [a u^{n+1} + (1 - a) u^n] \quad |1.63|$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_1 = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2}, \quad \Lambda_2 = a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \quad |1.64|$$

Dans ce cas, il faut résoudre à chaque pas le système d'équations :

$$-a r_1 (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - a r_2 (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + [1 + 2a(r_1 + r_2)] u_{i,j} = f_{i,j} \quad |1.65|$$

où $f_{i,j} = (E + (1 - a) \tau \Lambda) u_{i,j}^n$, $u_{i,j} = u_{i,j}^{n+1}$

Pour résoudre (1.65), on applique la méthode de *factorisation matricielle*. Cette méthode a été découverte, étudiée et appliquée avec succès aux problèmes de physique mathématique par un groupe de mathématiciens soviétiques (M. V. Keldych, I. M. Guelfand, K. I. Babenko, O. N. Lakoutsievski, N. N. Tchentsov et autres) [8].

G. I. Martchouk [9] a appliqué avec succès la méthode de factorisation vectorielle et matricielle pour la résolution de problèmes de physique nucléaire.

Nous allons décrire rapidement cette méthode sur l'exemple de l'équation de la chaleur à deux dimensions (1.62). On peut écrire l'équation (1.65) sous forme matricielle :

$$A_i \vec{u}_{i-1} + B_i \vec{u}_i + C_i \vec{u}_{i+1} = \vec{f}_i \quad |1.66|$$

où \vec{u}_i, \vec{f}_i sont les vecteurs $\{u_{i,j}\}, \{f_{i,j}\}$.

Les matrices A_i, B_i, C_i opèrent dans \mathcal{N}_2 — espace vectoriel normé des \vec{u}_i :

$$A_i = C_i = \left\| \begin{array}{ccc} -\alpha r_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha r_1 \end{array} \right\| = -\alpha r_1 I \text{ (I matrice unité)} \quad |1.67|$$

$$B_i = \left\| \begin{array}{cccc} 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) & -\alpha r_2 & 0 & 0 \\ -\alpha r_2 & 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) & -\alpha r_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha r_2 & 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) \end{array} \right\| \quad |1.68|$$

La forme des matrices A_i, B_i correspond au premier problème aux limites pour le rectangle :

$$\begin{cases} x = ih_1, & i = 0, 1, \dots, N_1 + 1 \\ y = jh_2, & j = 0, 1, \dots, N_2 + 1 \end{cases}$$

Les indices $0, N_1 + 1, N_2 + 1$ indiquant les frontières du rectangle.

Comme pour la méthode de récurrence, posons :

$$\vec{u}_i = X_i \vec{u}_{i+1} + \vec{Y}_i \quad |1.69|$$

où X_i est une matrice, \vec{u}_i et \vec{Y}_i des vecteurs.

Portant (1.69) dans (1.66), on obtient :

$$(B_i + A_i X_{i-1}) \vec{u}_i + C_i \vec{u}_{i+1} = \vec{f}_i - A_i \vec{Y}_{i-1} \quad |1.70|$$

Multiplions à gauche par la matrice $(B_i + A_i X_{i-1})^{-1}$; on obtient :

$$\vec{u}_i = -(A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} C_i \vec{u}_{i+1} + (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} (\vec{f}_i - A_i \vec{Y}_{i-1}) \quad |1.71|$$

En comparant (1.71) et (1.69), on obtient :

$$\begin{cases} X_i = -(A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} C_i \\ \vec{Y}_i = (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} (\vec{f}_i - A_i \vec{Y}_{i-1}) \end{cases} \quad |1.72|$$

Des conditions aux limites, on tire :

$$X_0 = 0; \vec{Y}_0 = \vec{u}_0, \vec{u}_0 = \{g(0, y_j, t)\}, y_j \in [0, 1], y_j = jh_2 \quad |1.73|$$

Les conditions (1.73) constituent des données initiales pour les formules de récurrence (1.72) qui permettent de calculer X_i, \vec{Y}_i jusqu'à $i = N_1$. L'égalité :

$$\vec{u}_{N_1} = X_{N_1} \vec{u}_{N_1+1} + \vec{Y}_{N_1}, \quad u_{N_1+1} = \{g(1, y_j, t)\}, \quad y_j \in [0, 1] \quad |1.74|$$

permet de déterminer le vecteur \vec{u}_{N_1} à partir du vecteur connu \vec{u}_{N_1+1} , après quoi \vec{u}_i se détermine grâce à la relation (1.69).

Par conséquent, le schéma de récurrence matricielle est tout à fait analogue à la récurrence habituelle à la seule différence qu'à la place des grandeurs scalaires X_i, Y_i, u_i , nous effectuons la récurrence sur les vecteurs \vec{u}_i, \vec{Y}_i et la matrice X_i , que les coefficients A_i, B_i, C_i deviennent des matrices, et qu'il faut comprendre toutes les opérations comme des opérations sur des matrices et des vecteurs.

Si les coefficients de l'équation de la chaleur sont variables, alors pour chaque i il faut inverser une matrice d'ordre \mathcal{N}_2 , ce qui est la difficulté de l'opération.

C'est pourquoi l'application de la méthode de factorisation matricielle pour les équations de la chaleur dans un domaine rectangle n'est recommandable que si \mathcal{N}_2 n'est pas trop grand. L'algorithme est encore plus compliqué pour la résolution des problèmes à trois dimensions.

Une des causes de l'augmentation brutale du nombre d'opérations est l'augmentation de la dimension de l'opérateur aux différences pour le pas le plus élevé en comparaison avec le problème à une dimension. On peut essayer de diminuer la dimension de cet opérateur. Par exemple, à la place du schéma aux différences (1.63), on peut appliquer l'approximation suivante :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n \quad |1.75|$$

Dans ce cas, la résolution du schéma implicite (1.75) se ramène aux récurrences habituelles sur X_i . Il est facile de montrer, cependant, que le schéma (1.75) est *stable sous condition*.

En effet, le coefficient $\varrho(k) = e^{a\tau}$ de dimension de l'harmonique s'exprime par la fraction :

$$\varrho(k_1, k_2) = \frac{1 - a_2}{1 + a_1}; \quad a_s = 4 r_s \sin^2 \frac{k_s h_s}{2}; \quad r_s = \frac{a^2 \tau}{h_s^2} \quad |1.76|$$

La condition de *stabilité sous condition* a la forme :

$$r_2 \leq \frac{1}{2} \quad |1.77|$$

Nous voyons que l'instabilité peut apparaître comme conséquence de l'approximation explicite sur la dérivée par rapport à x_2 : alors que la solution harmonique $A(t) e^{ik_1 x_1}$ a une amplitude constamment décroissante, la solution harmonique $A(t) e^{ik_2 x_2}$ aura une amplitude croissante si la condition (1.77) n'est pas remplie. Les difficultés qui apparaissent pour des problèmes polydimensionnels dans la construction de schémas simples absolument stables ne peuvent être surmontées par des schémas homogènes et des approximations simples, quand l'intégration est effectuée

de façon unique pas à pas. Il convient donc de changer la structure du schéma aux différences et de compliquer l'approximation.

Étendons-nous un peu sur ce sujet. Jusqu'à présent dans la construction de schémas aux différences, nous avons utilisé des approximations très simples.

Par exemple,

l'opérateur $D = \frac{\partial}{\partial x}$ est approché par l'opérateur $\alpha \frac{\Delta_1}{h} + (1 - \alpha) \frac{\Delta_{-1}}{h}$,

l'opérateur $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ par l'opérateur $\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2}$, etc.

Comme critère de choix de la simplicité de l'approximant, on peut utiliser la minimisation — pour une précision donnée — du nombre de points du maillage entrant dans le domaine de définition de l'opérateur aux différences.

Soit $\Lambda \sim \Omega$ l'approximant d'ordre 0 (h^α) le plus simple. Alors, posant :

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + h^\alpha \Phi$$

où Φ est un opérateur arbitraire borné non singulier, $\bar{\Lambda}$ sera une approximation de Ω également d'ordre 0 (h^α). Avec ceci, on a à sa disposition tout un choix de paramètres ou de fonctions liés à l'opérateur arbitraire Φ que l'on peut utiliser dans un but ou dans un autre. L'utilisation du schéma avec une approximation plus compliquée rend plus souple l'obtention de schémas et donne la possibilité d'obtenir des schémas de réalisation aisée.

2. Schémas simples à pas fractionnaires pour l'intégration d'équations de type parabolique

2.1 Méthode des directions alternées

Le schéma *stable sous condition* (1.75) est dissymétrique : l'approximation de la dérivée seconde par rapport à x est implicite et par rapport à y explicite. Étudions la symétrisation du schéma dans lequel x et y échangent leurs rôles à chaque pas :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1}}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^{n+2} \end{aligned} \quad |2.1|$$

Au premier pas, comme dans le schéma (1.75), l'opérateur $\mathfrak{L}_1 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, est approché implicitement et $\mathfrak{L}_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ explicitement; au second pas, c'est le contraire, etc.

Nous appellerons (2.1) *schéma des directions alternées* ou S. D. A.

Le S. D. A. fut proposé en 1955 en même temps par Peaceman, Rachford et Douglas [10, 11]. Nous allons montrer que le S. D. A. est absolument stable et absolument consistant à l'équation de la chaleur (1.62).

Comme dans le schéma (2.1) le calcul ne se répète que dans le passage du pas n au pas $n + 2$, nous allons considérer le pas $n + 1$ comme un pas intermédiaire. Pour mettre ceci en évidence, nous allons considérer le schéma (2.1) comme faisant passer du pas n au pas $n + 1$ avec le pas intermédiaire $n + \frac{1}{2}$. Avec cette convention, (2.1) prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{n+1}) \end{aligned} \quad |2.2|$$

Nous allons montrer que le schéma (2.2) est équivalent à un certain schéma homogène stable sans condition et consistant sans condition à l'équation (1.62). Comme dans [12], écrivons (2.2) sous la forme :

$$A_1 u^{n+\frac{1}{2}} - B_1 u^n = 0 \quad |2.3 a|$$

$$A_2 u^{n+1} - B_2 u^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad |2.3 b|$$

$$\text{avec } A_1 = E - \frac{\tau \Lambda_1}{2}, \quad A_2 = E - \frac{\tau \Lambda_2}{2}, \quad B_1 = E + \frac{\tau \Lambda_2}{2}, \quad B_2 = E + \frac{\tau \Lambda_1}{2} \quad |2.4|$$

Multiplions (2.3 a) à gauche par B_2 , (2.3 b) par A_1 et additionnons :

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_2 B_1 u^n + (B_2 A_1 - A_1 B_2) u^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

Si nous supposons que les opérateurs Λ_1 et Λ_2 sont commutatifs¹, on arrive au schéma :

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_1 B_2 u^n = 0 \quad |2.5|$$

Reportant (2.4) dans (2.5), après quelques calculs simples, on obtient le schéma homogène équivalent à (2.2) :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} (u^n + u^{n+1}) - \frac{1}{4} \tau \Lambda_1 \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \quad |2.6|$$

D'où l'on déduit que le schéma (2.6) et son équivalent (2.2) approchent l'équation de la chaleur avec la même précision que le schéma :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

Démontrons la stabilité inconditionnelle du schéma (2.6) ou, ce qui revient au même, du schéma (2.2). Posons :

$$u^n = \eta^n e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \quad u^{n+\frac{1}{2}} = \eta^{n+\frac{1}{2}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \quad |2.7|$$

Reportant (2.7) dans (2.2), on obtient :

$$\varrho_1 = \frac{\eta^{n+\frac{1}{2}}}{\eta^n} = \frac{1 - \frac{a_2}{2}}{1 + \frac{a_1}{2}} \quad |2.8 a|$$

$$\varrho_2 = \frac{\eta^{n+1}}{\eta^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \frac{a_1}{2}}{1 + \frac{a_2}{2}} \quad |2.8 b|$$

1. Dans le cas des équations aux différences avec des coefficients constants, d'un problème de Cauchy défini dans $L_2[-\pi, +\pi]$ et d'une fonction scalaire u^n , la commutativité est effective.

$$\varrho = \varrho_1 \varrho_2 = \frac{\left(1 - \frac{a_1}{2}\right) \left(1 - \frac{a_2}{2}\right)}{\left(1 + \frac{a_1}{2}\right) \left(1 + \frac{a_2}{2}\right)} \quad |2.8 c|$$

$$a_s = 4 r_s \sin^2 \frac{k_s h_s}{2}, \quad r_s = \frac{a^2 \tau}{h_s^2}, \quad s = 1, 2 \quad |2.9|$$

On en déduit que $|\varrho| \leq 1 \quad \forall \tau$. |2.10|

La stabilité de (2.2) est démontrée. Il est facile de voir que (2.6) produit la même expression de ϱ . De cette façon, grâce à l'introduction de pas fractionnaires intermédiaires, nous avons obtenu un schéma absolument stable. De plus, à la place d'une récurrence matricielle nous obtenons deux récurrences simples, ce qui diminue considérablement l'étendue des calculs.

Analysons les formules (2.8). L'égalité (2.8) montre que pendant le premier demi-pas l'erreur dans la direction de x_1 diminue de $\left(1 + \frac{a_1}{2}\right)$ fois, et l'erreur dans la direction de x_2 augmente de $\left(1 - \frac{a_2}{2}\right)$ fois, alors que pendant le deuxième demi-pas, au contraire, l'erreur dans la direction de x_1 augmente de $\left(1 - \frac{a_1}{2}\right)$ fois, et l'erreur dans la direction de x_2 diminue de $\left(1 + \frac{a_2}{2}\right)$ fois.

Par conséquent, aussi forte que soit l'erreur dans une direction donnée pour un demi-pas donné, au demi-pas suivant elle diminue forcément, aussi en deux demi-pas elle n'augmente pas en module. Ceci montre immédiatement l'avantage du S. D. A. sur le schéma (1.75) :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n$$

et sur le schéma analogue :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^n + \Lambda_2 u^{n+1}$$

Dans le premier schéma l'erreur dans la direction de x_1 diminuera toujours de $(1 + a_1)$ fois et l'erreur dans la direction de x_2 augmentera toujours de $(1 - a_2)$ fois. Dans le deuxième schéma au contraire, à chaque pas l'erreur dans la direction de x_1 augmentera de $(1 - a_1)$ fois et l'erreur dans la direction de x_2 diminuera de $(1 + a_2)$ fois. Par conséquent il est indispensable d'échanger les rôles de x_1 et x_2 , ce qui est fait dans le S. D. A.

Dans cette méthode l'intégration dans chaque direction est réalisée alternativement soit à l'aide du schéma explicite, soit à l'aide du schéma implicite et l'augmentation

de l'erreur dans le schéma explicite est compensée par la diminution de l'erreur dans le schéma implicite¹.

De ces considérations découle immédiatement le fait que le S. D. A. n'est pas applicable au problème à trois dimensions. Étudions pour l'équation bidimensionnelle de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad |2.11|$$

un schéma analogue au S. D. A. Dans ce cas l'intégration dans chaque direction x_1, x_2, x_3 est une fois implicite et deux fois explicite. Par conséquent l'augmentation de l'erreur dans le schéma explicite n'est pas compensée par sa diminution dans le cas implicite. Confirmons ce fait par une analyse précise du S. D. A. à trois dimensions :

$$\left[\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{3} (\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n) \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{3} (\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 u^{n+\frac{1}{3}}) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{3} (\Lambda_1 u^{n+\frac{2}{3}} + \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 u^{n+1}) \end{aligned} \right. \quad |2.12|$$

Pour les coefficients des produits, on obtient :

$$\left[\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{1 - \frac{1}{3}(a_2 + a_3)}{1 + \frac{1}{3}a_1}; \quad \varrho_2 = \frac{1 - \frac{1}{3}(a_1 + a_3)}{1 + \frac{1}{3}a_2}; \quad \varrho_3 = \frac{1 - \frac{1}{3}(a_1 + a_2)}{1 + \frac{1}{3}a_3} \\ \varrho &= \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = \frac{\left[1 - \frac{1}{3}(a_2 + a_3)\right] \left[1 - \frac{1}{3}(a_3 + a_1)\right] \left[1 - \frac{1}{3}(a_1 + a_2)\right]}{\left(1 + \frac{1}{3}a_1\right) \left(1 + \frac{1}{3}a_2\right) \left(1 + \frac{1}{3}a_3\right)} \end{aligned} \right. \quad |2.13|$$

On en déduit immédiatement que le schéma n'est pas absolument stable.

1. La compensation de stabilité dans la méthode à pas fractionnaires est analogue à la compensation de solidité à la flexion d'une feuille de contreplaqué composée d'une série de feuilles collées avec des fibres tournées alternativement dans un sens puis dans un autre. Si l'on colle les feuilles avec les fibres toujours dans le même sens, la compensation n'a plus lieu.

En effet, pour τ assez grand et $h_1 = h_2 = h_3$, on a $\left(r_s = \frac{a^2 \tau}{h_s^2} \text{ et } a_s = 4 r_s \sin^2 \frac{k_s h_s}{2} \right)$:

$$\varrho_1 = \frac{1 - \frac{2}{3} a}{1 + \frac{1}{3} a} \approx \frac{-\frac{2}{3} a}{\frac{1}{3} a} \approx -2 \quad \left(\frac{2}{3} a \text{ assez grand devant } 1 \right) \text{ et}$$

$$\varrho = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \approx -8 \quad |2.14|$$

Remarquons également que le S. D. A. ne s'applique pas à la résolution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

même pour $m = 2$.

NOTE DU TRADUCTEUR

Nous avons programmé le SDA en Algol simple précision dans le carré $[0,2] \times [0,2]$; $t \in [0,20]$; solution exacte : $u(x, y, t) = 10\,000 + \exp(x + y + 2\sigma^2 t)$.

Pour $\sigma^2 = 0,1$, $\tau = 1/100$, $N = \frac{x_{max}}{h} = \frac{2}{h}$, nous avons trouvé :

N	Erreur relative moyenne	Temps machine sur IBM 7044 (Compilation comprise)
10	$7,4 \cdot 10^{-6}$	5 minutes
20	$1,7 \cdot 10^{-6}$	10 minutes
50	$1,2 \cdot 10^{-6}$	20 minutes

Pour $N = 50$, le maximum de l'erreur relative est de $1,5 \cdot 10^{-6}$.

En prenant comme solution exacte $u = \exp(x + y + 2\sigma^2 t)$, on trouve pour $N = 10$ et $NT = 100$ une erreur relative moyenne de $7,2 \cdot 10^{-4}$ ($\sigma^2 = 0,1$).

2.2 Schéma des corrections stabilisatrices

Pour la résolution des équations tridimensionnelles de la chaleur dans l'ouvrage [12], Douglas et Rachford ont proposé le schéma suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{3}} - u^n) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right\} |2.15|$$

On peut recopier le schéma (2.15) sous la forme :

$$\left[\begin{array}{l} A_s u^{n+\frac{s}{3}} - B_s u^{n+\frac{s}{3}} = C_s u^n \\ A_s = E - \tau \Lambda_s, \quad B_s = E \\ C_1 = \tau (\Lambda_2 + \Lambda_3); \quad C_2 = -\tau \Lambda_2; \quad C_3 = -\tau \Lambda_3 \end{array} \right]_{s=1, 2, 3} \quad |2.16|$$

Éliminant $u^{n+\frac{1}{3}}$ et $u^{n+\frac{2}{3}}$ entre ces trois équations, on obtient le schéma homogène équivalent :

$$A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - B_1 B_2 B_3 u^n = [C_1 + A_1 C_2 + A_1 A_2 C_3] u^n \quad |2.17|$$

En utilisant (2.16), on peut mettre encore (2.17) sous la forme (en ordonnant par rapport à τ) :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} - \tau (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) (u^{n+1} - u^n) + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n) \quad \text{avec } \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3. \quad |2.18|$$

Pour le coefficient d'accroissement de l'erreur, on a :

$$\rho = \frac{1 + (a_1 a_2 + a_3 a_1 + a_3 a_2) + a_1 a_2 a_3}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)} = 1 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)} \quad |2.19|$$

De (2.18) on déduit la consistance, de (2.19) la stabilité.

Remarquons que la structure du schéma est la suivante : le premier pas donne la consistance absolue à l'équation de la chaleur, les pas suivants sont correcteurs et servent à améliorer la stabilité. C'est pour cela que l'on nomme ce schéma à *corrections stabilisatrices*. Plus tard [26] Douglas a exposé le schéma à corrections stabilisatrices de second ordre de précision (cf. ch. 2, 7).

2.3 Schéma de désintégration pour l'équation de la chaleur sans dérivée mixte (système orthogonal de coordonnées)

L'analyse de la stabilité du schéma alterné nous a montré que l'approximation par un opérateur explicite diminue la stabilité. Ceci nous conduit à l'idée d'utiliser à chaque pas intermédiaire uniquement des opérateurs implicites. De plus, chaque pas intermédiaire réalise une partie de l'approximation de l'opérateur :

$$\mathcal{L}_s = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \quad |2.20|$$

L'approximation totale étant obtenue à la fin du pas entier.

Un schéma de ce genre fut pour la première fois proposé par l'auteur dans l'ouvrage [13]. Nous appellerons ces schémas *schémas de désintégration*¹.

Un schéma très simple de désintégration pour une équation de la chaleur à trois dimensions est le suivant :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} \quad |2.21 a|$$

$$\frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} = \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{3}} \quad |2.21 b|$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_3 u \quad |2.21 c|$$

Recopions-le sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_s u^{n+\frac{s}{3}} - B_s u^{n+\frac{s-1}{3}} = 0 \\ A_s = E - \tau \Lambda_s, \quad B_s = E \end{array} \right\} s = 1, 2, 3 \quad |2.22|$$

Éliminant $u^{n+\frac{1}{3}}$, $u^{n+\frac{2}{3}}$, on trouve le schéma équivalent :

$$A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - B_1 B_2 B_3 u^n = A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - E u^n = 0 \quad |2.23|$$

Ordonnant (2.23) par rapport à τ , on trouve :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} - \tau (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) u^{n+1} + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 u^{n+1} \quad |2.24|$$

Pour $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho$, on trouve :

$$\varrho_s = \frac{1}{1 + a_s}, \quad s = 1, 2, 3; \quad \varrho = \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)} \quad |2.25|$$

De (2.24) on déduit la consistance de (2.25) la stabilité du schéma (2.12). Il est facile de voir que le schéma (2.21) satisfait la condition de l'extrémum. Ceci découle du fait que chaque équation (2.21 a), (2.21 b), (2.21 c) satisfait la condition de l'extrémum. Étudions, par exemple, le schéma (2.21 a), en l'écrivant d'abord de façon indiquée mais en supprimant, pour simplifier, les indices par rapport à x_2 et x_3 :

$$\frac{u_i^{n+\frac{1}{3}} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}} - 2 u_i^{n+\frac{1}{3}} + u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}}}{h^2}$$

1. Les schémas de désintégration sont souvent appelés schémas de *splitting-up* (N.d.T.)

Résolvant par rapport à $u_i^{n+\frac{1}{3}}$, on trouve : $\left(r = \frac{a^2 \tau}{h^2} \right)$

$$u_i^{n+\frac{1}{3}} = \frac{r}{1+2r} u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+2r} u_i^n + \frac{r}{1+2r} u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}}$$

D'où la condition d'extrémum :

$$\min \left\{ u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}}, u_i^n, u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}} \right\} \leq u_i^{n+\frac{1}{3}} \leq \max \left\{ u_{i-1}^{n+\frac{1}{3}}, u_i^n, u_{i+1}^{n+\frac{1}{3}} \right\}$$

De cette condition, en particulier, on déduit la convergence dans C de la solution aux différences vers la solution de l'équation différentielle (convergence uniforme). Pour l'amélioration de la précision du schéma (2.21) nous pouvons appliquer le schéma avec un poids α :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left[\alpha u^{n+\frac{1}{3}} + (1-\alpha) u^n \right] \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left[\alpha u^{n+\frac{2}{3}} + (1-\alpha) u^{n+\frac{1}{3}} \right] \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \Lambda_3 \left[\alpha u^{n+1} + (1-\alpha) u^{n+\frac{2}{3}} \right] \end{aligned} \right\} \quad |2.26|$$

Le schéma homogène équivalent a la forme :

$$\left. \begin{aligned} A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - B_1 B_2 B_3 u^n &= 0 \\ A_s &= E - \alpha \tau \Lambda_s, \quad B_s = E + (1-\alpha) \tau \Lambda_s, \quad s = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad |2.27|$$

Ordonnant (2.27) par rapport à τ , on trouve :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \left[\alpha u^{n+1} + (1-\alpha) u^n \right] + \tau \left[\Phi_1 u^{n+1} + \Phi_0 u^n \right] \quad |2.28|$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\alpha^2 [\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3] + \tau \alpha^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \\ \Phi_0 &= (1-\alpha)^2 [\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3] + \tau (1-\alpha)^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \end{aligned} \right\} \quad |2.29|$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient le schéma :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \\ &\quad + \frac{\tau^2}{8} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (u^{n+1} + u^n) \end{aligned} \quad |2.30|$$

Le schéma (2.30) a une précision d'ordre 0 ($\tau^2 + h^2$).

NOTE DU TRADUCTEUR

Nous avons programmé en Algol simple précision le schéma 2.26 dans les trois cas suivants :

1) Équation de la chaleur à deux dimensions sans second membre

Domaine : $[0,1] \times [0,1]$; $t_{\max} = 1$; solution exacte : $u(x, y, t) = \exp(x + y + 2t)$.

$N \backslash NT$	100	200	300	500
10	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-4}$
20	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
30	$5,9 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-5}$	
50	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$		

Ce tableau donne en fonction de N et de NT l'erreur absolue moyenne. Le temps machine est de la forme $t = k N^2 NT$; voici quelques chiffres (programmation sur IBM 7044, compilation comprise) :

$N = 10$; $NT = 200$; temps : 4 minutes.

$N = 30$; $NT = 100$: 10 minutes; $NT = 200$: 20 minutes; $NT = 300$: 30 minutes.

2) Équation de la chaleur à deux dimensions avec second membre¹

Domaine : $[0,1] \times [0,1]$; $t_{\max} = 1$; solution exacte : $u = \sin(x + y + t)$; second membre : $f = \cos(x + y + t) + 2a^2 \sin(x + y + t)$; nous avons pris $a = 1$.

N	NT	Erreur absolue moyenne	Temps sur IBM 7044 compilation comprise
10	100	$0,35 \cdot 10^{-2}$	2' 20"
20	200	$0,19 \cdot 10^{-2}$	12' 09"
10	500	$0,75 \cdot 10^{-3}$	8' 09"
20	500	$0,79 \cdot 10^{-3}$	28' 41"

3) Équation de la chaleur à trois dimensions

Domaine : $[0,1]^3$; $t_{\max} = 1$; solution exacte : $u = \exp[x + y + z + 3a^2 t]$.

Pour $a = 1$ et $N = 10$, nous avons le tableau :

NT	60	70	80	90	100
Erreur relative moyenne	$4,61 \cdot 10^{-5}$	$4,56 \cdot 10^{-5}$	$4,54 \cdot 10^{-5}$	$4,52 \cdot 10^{-5}$	$4,51 \cdot 10^{-5}$

Pour $NT = 60$ et $NT = 100$ nous avons eu des temps machines de 15 à 25 minutes (avec $N = 10$).

1. Les résultats numériques sont donnés avec un découpage $f = f_1 + f_2$ quelconque; nous avons montré (cf. Lemaréchal-Népomiastchy [1]) comment choisir f_1 et f_2 de manière à améliorer la précision.

Schéma de désintégration pour l'équation de la chaleur avec des dérivées mixtes (système de coordonnées quelconques)

Étudions l'équation de type parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{L}u, \quad \mathfrak{L} = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = \text{const.} \quad |2.31|$$

$$a_{11} \text{ et } a_{22} > 0; \quad a_{12} = a_{21} \text{ et } a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad |2.32|$$

Dans ce cas, le schéma homogène aux différences :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda [\alpha u^{n+1} + (1 - \alpha) u^n], \quad \Lambda \sim \mathfrak{L}, \quad |2.33|$$

devient nanodiagonal, et la résolution du système par récurrence matricielle devient très volumineuse. L'application du schéma implicite alternée, elle aussi, ne conduit pas à un schéma simple.

Dans les travaux de V. A. Soutchkov, Y. I. Pogodine et de l'auteur [14], le schéma suivant est proposé :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{12} u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_{21} u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{22} u^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad |2.34|$$

où

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{11} &= a_{11} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \sim \mathfrak{L}_{11} = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ \Lambda_{12} = \Lambda_{21} &= a_{12} \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4 h_1 h_2} \sim \mathfrak{L}_{12} = a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \Lambda_{22} &= a_{22} \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \sim \mathfrak{L}_{22} = a_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{aligned} \right\} \quad |2.35|$$

Il est facile de voir que (2.34) est un schéma de désintégration.

En effet, au premier demi-pas, on approche la « moitié » de l'opérateur \mathfrak{L} ($\mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{12}$), \mathfrak{L}_{11} étant approché au niveau supérieur $n + \frac{1}{2}$ et \mathfrak{L}_{12} à l'inférieur; au deuxième demi-pas on approche la deuxième « moitié » de l'opérateur \mathfrak{L} ($\mathfrak{L}_{21} + \mathfrak{L}_{22}$), $\mathfrak{L}_{21} = \mathfrak{L}_{12}$ étant approché au niveau inférieur $n + \frac{1}{2}$ et \mathfrak{L}_{22} au niveau supérieur $n + 1$.

Le schéma homogène équivalent a la forme :

$$\left. \begin{aligned} A_{11} A_{22} u^{n+1} - A_{12}^2 u^n &= 0 \\ A_{ij} &= E + (-1)^{i+j+1} \tau \Lambda_{ij}; \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad [2.36]$$

Divisons par τ :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) u^{n+1} + 2 \Lambda_{12} u^n - \tau (\Lambda_{11} \Lambda_{22} u^{n+1} - \Lambda_{12}^2 u^n) \quad [2.37]$$

On en déduit la consistance à (2.31) du schéma (2.34).

Il est facile de démontrer la stabilité du schéma. En effet,

$$\varrho_1 = \frac{1 - l_{12}}{1 + l_{11}}, \quad \varrho_2 = \frac{1 - l_{12}}{1 + l_{22}}, \quad \varrho = \frac{(1 - l_{12})^2}{(1 + l_{11})(1 + l_{22})} \quad [2.38]$$

$$\text{où } l_{ii} = 4 \tau \frac{a_{ii}}{h_i^2} \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}, \quad l_{12} = 4 \tau \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \cos \frac{k_1 h_1}{2} \cos \frac{k_2 h_2}{2} \cdot \sin \frac{k_1 h_1}{2} \sin \frac{k_2 h_2}{2} \quad [2.39]$$

De là, tenant compte de (2.32), il vient :

$$|\varrho| \leq 1 \quad [2.40]$$

La stabilité et avec elle la convergence du schéma sont démontrées.

NOTE DU TRADUCTEUR

Nous avons cru utile de détailler un peu la démonstration de (2.40). D'après (2.32), a_{11} et a_{22} sont positifs et

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

Par conséquent, nous avons également l_{11} et l_{22} positifs et

$$l_{11} l_{22} - l_{12}^2 > 0$$

En effet, posant pour simplifier :

$$z^2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

$$s^2 = \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2} \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2} < 1$$

$$t^2 = \cos^2 \frac{k_1 h_1}{2} \cos^2 \frac{k_2 h_2}{2} < 1$$

$$\text{il vient : } l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = \frac{16 \tau^2}{h_1^2 h_2^2} [(a_{12}^2 + z^2) s^2 - a_{12}^2 s^2 t^2] = \frac{16 \tau^2}{h_1^2 h_2^2} [a_{12}^2 s^2 [1 - t^2] + z^2 s^2] \geq 0$$

Remarquant maintenant que l_{11} et l_{22} positifs entraîne d'une part que $\varrho = \frac{(1 - l_{12})^2}{(1 + l_{11})(1 + l_{22})}$ est

positif, d'autre part que $\frac{l_{11} + l_{22}}{2} \geq \sqrt{l_{11}l_{22}}$, nous pouvons alors (utilisant $l_{11}l_{22} \geq l_{12}^2$) encadrer ϱ de la manière suivante :

$$0 \leq \varrho \leq \frac{(1 - l_{12})^2}{1 + 2\sqrt{l_{11}l_{22}} + l_{11}l_{22}} \leq \left[\frac{1 - l_{12}}{1 + |l_{12}|} \right]^2$$

On en déduit que $|\varrho| \leq 1$ quel que soit l_{12} .

Avec des conditions plus sévères que les conditions elliptiques (2.32), on peut appliquer la méthode de désintégration également à l'équation de la chaleur tridimensionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad |2.41|$$

Dans ce cas on peut appliquer le schéma suivant, proposé par l'auteur [15, 18] :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{6}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{6}} + \Lambda_{12} u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{6}} - u^{n+\frac{1}{6}}}{\tau} &= \Lambda_{21} u^{n+\frac{1}{6}} + \frac{1}{2} \Lambda_{22} u^{n+\frac{2}{6}} \\ \frac{u^{n+\frac{3}{6}} - u^{n+\frac{2}{6}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_{11} u^{n+\frac{3}{6}} + \Lambda_{13} u^{n+\frac{2}{6}} \\ \frac{u^{n+\frac{4}{6}} - u^{n+\frac{3}{6}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_{33} u^{n+\frac{4}{6}} + \Lambda_{31} u^{n+\frac{3}{6}} \\ \frac{u^{n+\frac{5}{6}} - u^{n+\frac{4}{6}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_{22} u^{n+\frac{5}{6}} + \Lambda_{23} u^{n+\frac{4}{6}} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{5}{6}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_{33} u^{n+1} + \Lambda_{32} u^{n+\frac{5}{6}} \end{aligned} \right\} |2.42|$$

Le schéma (2.42) est consistant à (2.41) et est stable si la matrice $\|b_{ij}\|$ est définie positive, où :

$$b_{ij} = a_{ij} \text{ si } i \neq j; \quad b_{ii} = \frac{a_{ii}}{2} \quad |2.43|$$

I. D. Sofronoff [65, 66] a proposé une série de schémas d'intégration de l'équation (2.31) basés sur le principe *prédicateur-correcteur* (cf. ch. 2-7).

Nous avons programmé le schéma (2.34) en Algol simple précision dans le domaine $[0,1] \times [0,1]$; $t_{\max} = 1$; $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 1$; $\sigma_{12} = 0,2$; solution exacte : $u = \exp [x + y + 2,4 t]$.

N	NT	Erreur absolue moyenne	Erreur relative moyenne	Temps sur IBM 7044 compilation comprise
10	80	$0,55 \cdot 10^{-2}$		
10	100	$0,46 \cdot 10^{-2}$	$0,38 \cdot 10^{-3}$	2 minutes
10	1 000	$0,14 \cdot 10^{-2}$		12 minutes
20	80		$0,40 \cdot 10^{-3}$	
20	100		$0,33 \cdot 10^{-3}$	
20	150		$0,22 \cdot 10^{-3}$	
30	80		$0,39 \cdot 10^{-3}$	
30	100		$0,31 \cdot 10^{-3}$	

5 Schéma de factorisation d'un opérateur aux différences

Les travaux de Baker et Oliphant [16] proposent la méthode suivante pour intégrer l'équation de la chaleur (1.62).

Soit :
$$\Omega u^{n+1} = f^n \quad |2.44|$$

un schéma implicite d'intégration de (1.62), Ω un opérateur aux différences à l'échelon supérieur ($n + 1$), f^n le résultat de l'application des opérateurs aux différences aux niveaux inférieurs. De façon indiquée, le schéma (2.44) s'écrit :

$$\sum_{k,l} C_{ijkl} u_{k,l}^{n+1} = f_{i,j}^n \quad |2.45|$$

Dans l'ouvrage [16] on démontre que si on se limite aux *opérateurs nanodiagonaux*, c'est-à-dire des opérateurs pour lesquels est vérifiée la relation :

$$C_{ijkl} = 0 \text{ pour } |i - k| > 1; \quad |j - l| > 1 \quad |2.46|$$

alors on peut choisir l'opérateur Ω de telle manière qu'il se présente sous la forme d'un produit de deux opérateurs *tridiagonaux* A et B, ce qui veut dire :

$$C_{ijkl} = A_{ik} B_{lj} \quad |2.47|$$

avec $A_{ik} = 0 \quad |i - k| > 1; \quad B_{lj} = 0, \quad |j - l| > 1 \quad |2.48|$

Dans l'ouvrage [16], le schéma (2.44) est issu de l'approximation à trois niveaux de l'équation de la chaleur (1.62) :

$$\frac{1,5 u^{n+1} - 2 u^n + 0,5 u^{n-1}}{\tau} = \Lambda u^{n+1} \quad |2.49|$$

où Λ est un opérateur *nanodiagonal*.

$$\text{Alors : } \Omega = 1,5 E - \tau \Lambda, \quad f^n = 2 u^n - 0,5 u^{n-1} \quad |2.50|$$

L'opérateur Λ est choisi de telle façon que l'approximation :

$$\Lambda \sim \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

soit d'un second ordre de précision et que l'opérateur Ω de (2.50) se présente comme un produit de deux opérateurs tridiagonaux au sens de (2.47).

Il se trouve qu'avec ces conditions Λ est déterminé de façon unique. Après cela la résolution du système (2.45) se ramène à deux récurrences.

En effet, posons :

$$A = \{ A_{ik} \}, \quad B = \{ B_{ik} \}, \quad v^{n+1} = \{ v_{i,j}^{n+1} \} \quad |2.51|$$

avec

$$v_{j,l}^{n+1} = \sum_k B_{jk} u_{k,l}^{n+1} \quad (v^{n+1} = B u^{n+1})$$

Alors l'équation (2.44) se sépare en deux équations :

$$A v^{n+1} = f^n, \quad B u^{n+1} = v^{n+1} \quad |2.52|$$

chacune d'entre elles se résolvant par une récurrence tridiagonale. Dans le travail [17], Baker a donné une généralisation du schéma de factorisation de l'équation au niveau supérieur dans le cas de l'équation polydimensionnelle de la chaleur avec des coefficients constants.

Comme l'a fait aimablement remarquer à l'auteur V. A. Soutchkov, le schéma de factorisation d'un opérateur proposé par Baker et Oliphant dans [16] est analogue au schéma de désintégration et y revient entièrement par l'échange d'une approximation à trois niveaux (2.49) avec l'habituelle à deux niveaux.

6 Schéma de factorisation approchée d'un opérateur

L'ouvrage [18] décrit la factorisation approchée d'un opérateur sur l'exemple de l'équation de la chaleur. Soit :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1}, \quad \Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_i, \quad \Lambda_i = a^2 \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} \quad |2.53|$$

une approximation très simple de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Écrivons (2.53) sous la forme :

$$(E - \tau \Lambda) u^{n+1} = E u^n \quad |2.54|$$

Factorisons l'opérateur $E - \tau \Lambda$ avec une précision d'ordre τ^2 .
Pour cela remplaçons $E - \tau \Lambda$ par la factorisation :

$$\prod_{i=1}^m (E - \tau \Lambda_i) = E - \tau \Lambda + \tau^2 \Phi \quad |2.55|$$

L'identification des termes en τ donne :

$$\Phi = \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j - \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + (-1)^m \tau^{m-2} \prod_{i=1}^m \Lambda_i$$

Remplaçons (2.54) par le schéma factorisé :

$$\Omega u^{n+1} = \prod_{i=1}^m (E - \tau \Lambda_i) u^{n+1} = E u^n \quad |2.55'|$$

Introduisons les quantités intermédiaires $\left\{ u^{n+\frac{i}{m}} \right\}_{i=1, \dots, m-1}$ à l'aide des égalités :

$$\left. \begin{aligned} (E - \tau \Lambda_1) u^{n+\frac{1}{m}} &= E u^n \\ (E - \tau \Lambda_2) u^{n+\frac{2}{m}} &= E u^{n+\frac{1}{m}} \\ \dots &\dots \dots \\ (E - \tau \Lambda_m) u^{n+1} &= E u^{n+\frac{m-1}{m}} \end{aligned} \right\} \quad |2.56|$$

Le schéma de désintégration (2.56) est équivalent au schéma de factorisation approchée d'un opérateur au niveau supérieur (2.55).

On effectue de façon tout à fait analogue la factorisation d'un opérateur au niveau supérieur dans le schéma de Baker et Oliphant.

Examinons l'approximation à trois niveaux de l'équation de la chaleur à deux dimensions :

$$\frac{1,5 u^{n+1} - 2 u^n + 0,5 u^{n-1}}{\tau} = \Lambda u^{n+1} \quad |2.57|$$

où
$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_i \sim \mathcal{L}_i = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad |2.58|$$

Écrivons le schéma (2.57) sous la forme :

$$(1,5 E - \tau \Lambda) u^{n+1} = f^n \quad \text{avec} \quad f^n = 2 u^n - 0,5 u^{n-1} \quad |2.59|$$

Remplaçant l'opérateur $1,5 E - \tau \Lambda$ par un opérateur factorisé, on obtient :

$$\Omega u^{n+1} = 1,5 \prod_{i=1}^m \left(E - \tau \frac{\Lambda_i}{1,5} \right) u^{n+1} = f^n \quad |2.60|$$

avec l'opérateur nanodiagonal factorisé Ω , ce qui coïncide avec le schéma de Baker et Oliphant.

Remarquons que l'approximation exacte de l'opérateur au niveau supérieur Ω à l'aide des formules (2.45-2.47) est impossible dans le cas de l'équation de la diffusion à coefficients variables, car dans ce cas des itérations complémentaires sont obligatoires (cf. [19]), rappelant le schéma de N. I. Bouleïev [20]. Mais la *factorisation approchée*, elle, est également valable pour des coefficients variables.

La méthode de construction de schéma avec des opérateurs au niveau supérieur factorisés pour une classe étendue d'équations à coefficients variables a été travaillée par E. G. Diakonov [21-24] qui a démontré sa convergence à l'aide des estimations *a priori* et a donné un algorithme de résolution des conditions aux limites¹.

Pour avoir plus de détails sur la factorisation approchée, cf. ch. 9, 3.

2.7 Schéma prédicteur-correcteur

Comme nous l'avons montré dans (chap. 1.2), le schéma S. D. A. (directions alternées) a une précision du second ordre, mais étant stable sous condition n'est pas applicable aux équations tridimensionnelles; quant au schéma à corrections stabilisatrices, bien qu'il soit absolument stable, il a seulement une précision du premier ordre en t .

L'ouvrage [25] de Brian propose un schéma absolument stable, réalisable par des récurrences tridiagonales, de second ordre de précision par rapport à t et aux variables spatiales. Le schéma est obtenu à partir du schéma à corrections stabilisatrices et a reçu le nom de *procédé prédicteur-correcteur*.

Expliquons le procédé prédicteur-correcteur sur un exemple simple d'intégration d'une équation différentielle banale :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, t) \quad |2.61|$$

Le schéma habituel des trapèzes :

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = \frac{f(x^n, t^n) + f(x^{n+1}, t^{n+1})}{2} \quad |2.62 a|$$

ou

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f\left(\frac{x^{n+1} + x^n}{2}, t^{n+\frac{1}{2}}\right) \quad |2.62 b|$$

1. E. G. DIAKONOV emploie le terme : *méthode de l'opérateur désintégrable*.

nécessite des itérations à cause de la non-linéarité de la partie de droite. Le schéma prédicteur-correcteur :

$$\frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^n}{\frac{\tau}{2}} = f(x^n, t^n) \quad |2.63 a|$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f(x^{n+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad |2.63 b|$$

est d'ordre 2 en précision et ne nécessite pas d'itérations.

De façon analogue, on peut appliquer ce procédé pour des équations aux dérivées partielles. Dans l'ouvrage [25], on propose un schéma d'intégration de l'équation (2.11) basé sur le procédé prédicteur-correcteur :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{6}} - u^n}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{6}} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n \quad |2.64 a|$$

$$\frac{u^{n+\frac{2}{6}} - u^{n+\frac{1}{6}}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{6}} - u^n) \quad |2.64 b|$$

$$\frac{u^{n+\frac{3}{6}} - u^{n+\frac{2}{6}}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_3 (u^{n+\frac{3}{6}} - u^n) \quad |2.64 c|$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{6}} + \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{6}} + \Lambda_3 u^{n+\frac{3}{6}} \quad |2.64 d|$$

Les équations (2.64 a, b, c) constituent le *prédicteur* (schéma des corrections stabilisatrices) conduisant u à $t = \left(n + \frac{3}{6}\right) \tau = \left(n + \frac{1}{2}\right) \tau$; l'équation (2.64 d) est le *correcteur*.

Montrons que le schéma (2.64) est absolument stable et de second ordre de précision par rapport à t et x_1, x_2, x_3 .

Éliminons les pas intermédiaires $u^{n+\frac{1}{6}}, u^{n+\frac{2}{6}}, u^{n+\frac{3}{6}}$ entre (2.64 a, b, c, d) :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \\ &\quad + \frac{\tau^3}{8} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \end{aligned} \quad |2.65|$$

On en déduit la stabilité absolue et le second ordre de précision du schéma (2.64).

Le travail de Douglas [26] propose un schéma à pas fractionnaires également absolument stable et du second ordre de précision :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \Lambda_1 (u^{n+\frac{1}{3}} + u^n) + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n &= \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} \\ \frac{1}{2} \Lambda_1 (u^{n+\frac{1}{3}} + u^n) + \frac{1}{2} \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{3}} + u^n) + \Lambda_3 u^n &= \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^n}{\tau} \\ \frac{1}{2} \Lambda_1 (u^{n+\frac{1}{3}} + u^n) + \frac{1}{2} \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{3}} + u^n) + \frac{1}{2} \Lambda_3 (u^{n+1} + u^n) &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \end{aligned} \right\} [2.66]$$

On peut recopier le schéma (2.66) sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_1 (u^{n+\frac{1}{3}} + u^n) + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{3}} - u^n) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right\} [2.67]$$

D'où l'on déduit que ce schéma a le caractère de corrections stabilisatrices. Le schéma après élimination des pas intermédiaires donne la même équation (2.65), c'est-à-dire que les schémas (2.64) et (2.66) sont équivalents.

Indiquons encore un schéma du type *prédicteur-correcteur* :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{6}} - u^n}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{6}} \quad [2.68 a]$$

$$\frac{u^{n+\frac{2}{6}} - u^{n+\frac{1}{6}}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{6}} \quad [2.68 b]$$

$$\frac{u^{n+\frac{3}{6}} - u^{n+\frac{2}{6}}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_3 u^{n+\frac{3}{6}} \quad [2.68 c]$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+\frac{1}{2}} \quad [2.68 d]$$

Les formules (2.68 a, b, c) forment le prédicteur ayant pour base un schéma de désintégration, la formule (2.68 d) est un correcteur.

Après élimination, le schéma a la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \left(\frac{\tau}{2}\right)^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \quad |2.69|$$

c'est-à-dire que le schéma (2.68) est équivalent aux schémas (2.64) et (2.66).

Nous appellerons les schémas basés sur le procédé prédicteur-correcteur des schémas de *corrections d'approximation*.

2.8 Quelques remarques à propos des schémas à pas fractionnaires

2.8.1 Les schémas à pas fractionnaires peuvent s'appliquer aux problèmes unidimensionnels

Examinons par exemple le schéma de V. K. Saouliev [27] localement implicite pour le calcul de l'équation unidimensionnelle de la chaleur.

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda u^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \Lambda u^{n+\frac{1}{2}}, \quad \Lambda = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} \end{aligned} \right] \quad |2.70|$$

qui utilise le schéma S. D. A. pour l'une des directions, x_1 par exemple. Montrons que le schéma (2.70) est équivalent à un schéma à deux niveaux pour $\alpha = \frac{1}{2}$ (schéma de Crank-Nicholson).

Écrivant (2.70) sous la forme :

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda \right) u^{n+\frac{1}{2}} = u^n, \quad E u^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda \right) u^{n+\frac{1}{2}} \quad |2.71|$$

et éliminant $u^{n+\frac{1}{2}}$, on trouve :

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda \right) u^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda \right) u^n \quad |2.72|$$

On en déduit :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} \quad (c.q.f.d.) \quad |2.73|$$

2.8.2 Recopions (2.70) avec des indices entiers

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = \Lambda u^n \quad [2.74 a]$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad [2.74 b]$$

Réunissant (2.74 a) et (2.74 b), on trouve :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = 2 \Lambda u^n \quad [2.75]$$

Par son aspect extérieur, (2.75) rappelle le schéma de la *croix*, pourtant les formules (2.74) montrent que (2.75) est un schéma non homogène et qu'on ne peut pas le traiter comme le schéma homogène de la *croix*.

Pour obtenir un schéma homogène, il faut éliminer u^n entre (2.74 a) et (2.74 b) et de façon analogue à (2.73), on obtient :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = \Lambda (u^{n+1} + u^{n-1}) \quad [2.76]$$

Par conséquent, la même formule (2.75) peut être utilisée de plusieurs façons suivant la loi de définition de u^n .

Indiquons encore un exemple analogue.

Le schéma à corrections stabilisatrices :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right\} [2.77]$$

peut être, par addition de (2.77 a) et (2.77 b), mis sous la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{n+1} \quad [2.78]$$

Le schéma de désintégration :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 u^{n+1} \end{aligned} \right\} [2.79]$$

donne par addition de (2.79 a) et (2.79 b) également l'équation (2.78) et pourtant les schémas (2.77) et (2.79) sont différents et formellement l'équation (2.78) a dans les deux schémas un sens différent puisque la quantité $u^{n+\frac{1}{2}}$ ne se définit pas de la même façon.

Les schémas correspondants, issus de l'élimination de $u^{n+\frac{1}{2}}$, sont différents.

2.5.3 Des schémas identiques en pas entiers peuvent donner des schémas différents en pas fractionnaires

Par exemple, le schéma en pas entiers :

$$\left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_1\right) \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_2\right) u^{n+1} = \left(E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_1\right) \left(E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_2\right) u^n \quad |2.80|$$

peut être utilisé par les schémas suivants en pas fractionnaires :

2.5.3.1 SCHÉMA S. D. A.

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n \right) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{n+1} \right) \end{aligned} \right] \quad |2.81|$$

2.5.3.2 SCHÉMA DE DÉSINTÉGRATION

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n \right) \\ &\quad \beta = 1 - \alpha \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \right] \quad |2.82|$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$;

2.5.3.3 SCHÉMA DE FACTORISATION APPROCHÉE D'UN OPÉRATEUR

$$\left. \begin{aligned} \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_1\right) u^{n+\frac{1}{2}} = f^n &= \left(E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_1\right) \left(E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_2\right) u^n \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_2\right) u^{n+1} &= u^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right] \quad |2.83|$$

Par conséquent, les schémas (2.81), (2.82), (2.83) peuvent être considérés comme la réalisation du même schéma (2.80). Les schémas (2.81), (2.82), (2.83), sans tenir compte des conditions initiales, sont équivalents.

Dans le cas d'une équation avec des coefficients variables, les schémas correspondants avec des pas entiers ne coïncident pas et les schémas (2.81), (2.82), (2.83) deviennent non-équivalents. De plus, un même schéma à pas fractionnaires peut avoir des réalisations différentes de conditions aux limites.

2.8.4. La méthode de désintégration pondérée pour $m \geq 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$

Cette méthode a une grande simplicité, conservant en même temps les propriétés de forte stabilité et de précision du second ordre.

Malgré cela, l'application du schéma prédictor-correcteur (cf. 2.8) prend sa pleine valeur dans le cas où il faut intégrer l'équation de la chaleur dans un intervalle de temps comprenant le régime asymptotique ($t \rightarrow \infty$).

Dans ce cas, les schémas prédictors-correcteurs, contrairement au schéma de désintégration, permettent l'agrandissement du pas parce qu'ils satisfont à la condition de consistance totale (cf. ch. 4).

2.9 Conditions aux limites dans la méthode à pas fractionnaires pour l'équation de la chaleur

Jusqu'à présent nous avons étudié le problème de Cauchy dans la bande $|x| < \infty$, $0 \leq t \leq T$, considérant que les données initiales se présentent sous la forme de séries ou d'intégrales de Fourier. Pour cela, il n'y avait pas de points frontières du maillage, et les équations aux différences étaient les mêmes pour tous les points de maillage.

Dans la pratique il faut résoudre des problèmes de Cauchy mixtes où les équations aux différences sont différentes sur la frontière de ce qu'elles sont pour les points intérieurs du domaine. Le résultat est que les points de la frontière peuvent changer l'ordre de la consistance par rapport aux points intérieurs. Par conséquent, les conditions aux limites se répercutent sur la précision du schéma.

La première analyse des conditions aux limites pour les schémas à pas fractionnaires pour l'équation de la chaleur fut donnée dans l'article de E. G. Diakonov [22]¹.

Suivant cet ouvrage, nous allons étudier pour les schémas de désintégration trois réalisations des conditions aux limites.

Pour l'équation :
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \quad |2.84|$$

posons le problème mixte de Cauchy :

$$\left. \begin{aligned} u(x_1, x_2, 0) &= u_0(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in G \\ u(x_1, x_2, t) &= f(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2) \in \gamma \end{aligned} \right] \quad |2.84 a|$$

1. Malheureusement, l'ouvrage contenait une faute d'arithmétique, qui a amené l'auteur à une fausse estimation de la méthode de désintégration. Malgré cela, la méthode de recherche des conditions aux limites proposée par E. G. DIAKONOV est juste à sa base.

dans le domaine cylindrique $\Pi = G \times H$, où G est le carré $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, γ sa frontière, $H = [0, t_0]$ (cf. fig. 2.1).

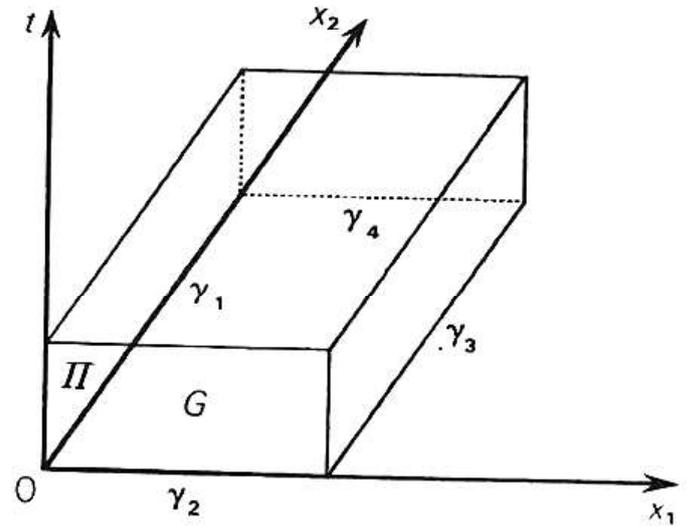


FIGURE 2.1. Domaine du problème mixte de Cauchy.

Pour le problème (2.84) nous allons utiliser le schéma de désintégration :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n \right) \quad [2.85 a]$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad [2.85 b]$$

et le schéma de factorisation approchée d'un opérateur :

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1) (E - \alpha \tau \Lambda_2) u^{n+1} = (E + \beta \tau \Lambda_1) (E + \beta \tau \Lambda_2) u^n \quad [2.86]$$

dans sa réalisation suivante ¹ :

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1) u^{n+\frac{1}{2}} = (E + \beta \tau \Lambda_1) (E + \beta \tau \Lambda_2) u^n \quad [2.87 a]$$

$$(E - \alpha \tau \Lambda_2) u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} \quad [2.87 b]$$

Étudions pour le schéma (2.85) la réalisation suivante des conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2) &= f \left[x_1, x_2, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right], & (x_1, x_2) \in \gamma \\ u^{n+1}(x_1, x_2) &= f [x_1, x_2, (n+1) \tau], & (x_1, x_2) \in \gamma \end{aligned} \right] \quad (A)$$

Dans le cas (A), la récurrence ne s'effectue pas sur la frontière car sur la frontière u est toujours égal aux conditions aux limites au moment correspondant. Par conséquent, sur la frontière les égalités (2.85) prennent la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n \right) + F_1^n, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}} \right) + F_2^n, \end{aligned} \right] \quad [2.88]$$

1. Remarquons que les schémas (2.85), (2.86) et (2.87) sont équivalents pour les problèmes de Cauchy purement périodiques, mais ne sont pas équivalents pour le problème aux limites (2.84 a). Dans le cas des coefficients variables, le schéma (2.86) n'est pas en général équivalent à (2.85).

où

$$\left. \begin{aligned} F_1^n &= \frac{f^{n+\frac{1}{2}} - f^n}{\tau} - \Lambda_1 \left(a f^{n+\frac{1}{2}} + \beta f^n \right), (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4 \\ F_2^n &= \frac{f^{n+1} - f^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} - \Lambda_2 \left(a f^{n+1} + \beta f^{n+\frac{1}{2}} \right), (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad |2.89|$$

On peut alors écrire (2.85) sous la forme :

$$A_1 u^{n+\frac{1}{2}} - B_1 u^n = g_1^n \quad |2.90|$$

$$A_2 u^{n+1} - B_2 u^{n+\frac{1}{2}} = g_2^n \quad |2.90 b|$$

où

$$\left. \begin{aligned} A_s &= E - a \tau \Lambda_s, \quad B_s = E + \beta \tau \Lambda_s, \quad s = 1, 2 \\ g_1^n &= 0, \quad g_2^n = 0, \quad (x_1, x_2) \in G - \gamma \\ g_1^n &= \tau F_1^n, \quad g_2^n = \tau F_2^n, \quad (x_1, x_2) \in \gamma \end{aligned} \right\} \quad |2.91|$$

Le schéma équivalent en pas entiers a la forme :

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_1 B_2 u^n = R^n, \quad R^n = B_2 g_1^n + A_1 g_2^n \quad |2.92|$$

Il est clair que $R^n = 0$ partout à l'intérieur de G , excepté sur les points du maillage appartenant à la courbe ω séparée de γ par un seul intervalle (voir fig. 2.2), sur laquelle

$$R^n = B_2 g_1^n \text{ pour } (x_1, x_2) \in \omega_2 \cup \omega_4; \quad R^n = A_1 g_2^n \text{ pour } (x_1, x_2) \in \omega_1 \cup \omega_3 \quad |2.93|$$

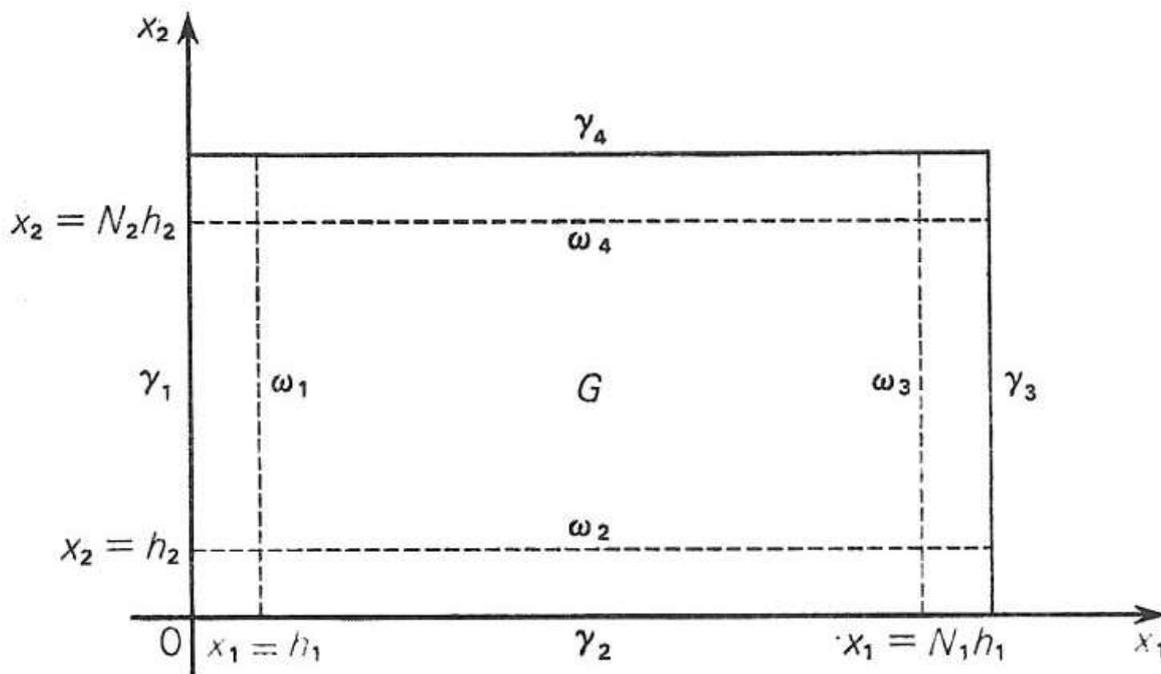


FIGURE 2.2. Frontière γ et ensemble ω . $(N_1 + 1)h_1 = 1$, $(N_2 + 1)h_2 = 1$

Des calculs simples nous donnent :

$$\left. \begin{aligned} R^n &= B_2 g_1^n = \beta \frac{\tau^2}{h_2^2} F_1^n, & (x_1, x_2) \in \omega_2 \cup \omega_4 \\ R^n &= A_1 g_2^n = -\alpha \frac{\tau^2}{h_1^2} F_2^n, & (x_1, x_2) \in \omega_1 \cup \omega_3 \end{aligned} \right\} |2.94|$$

Par conséquent, avec la loi de passage à la limite $\frac{\tau}{h^2} = C^{te}$,

l'erreur sur l'approximation des points de ω est 0 (1), c'est-à-dire qu'elle est finie; comme pour tous les autres points intérieurs à G elle est 0 (τ), estimant l'erreur dans L_2 , on a $\|u\|_{L_2} = 0(\tau^{1/4})$. Nous voyons qu'une grande erreur d'approximation est liée à la non-validation de l'équation (2.85) sur la frontière.

La réalisation de (A) a été étudiée dans [22].

Étudions maintenant une autre réalisation des conditions aux limites dans le schéma de désintégration :

$$u^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2) = f^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cup \gamma_3 \quad (Ba)$$

$$A_1 u^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2) - B_1 u^n(x_1, x_2) = A_1 u^{n+\frac{1}{2}} - B_1 f^n = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2 \cup \gamma_4 \quad (Bb)$$

$$u^{n+1}(x_1, x_2) = f^{n+1}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2 \cup \gamma_4 \quad (Bc)$$

$$A_2 u^{n+1}(x_1, x_2) - B_2 u^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2) = A_2 u^{n+1} - B_2 f^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cup \gamma_3 \quad (Bd)$$

Dans le cas (B), au premier pas intermédiaire les conditions aux limites sont vérifiées sur γ_1, γ_3 ; sur γ_2, γ_4 elles sont remplacées par la condition b); au deuxième pas intermédiaire au contraire, les conditions sont exactement remplies sur γ_2, γ_4 ; sur γ_1, γ_3 elles sont remplacées par les conditions c). Le fait de satisfaire les conditions b) et d) indique que la récurrence s'effectue également sur la frontière.

Avec un tel procédé, nous satisfaisons les conditions aux limites sur la frontière sur un seul pas fractionnaire, mais l'équation (2.85) est vérifiée partout sur \bar{G} , par conséquent l'élimination des pas fractionnaires conduit à un schéma en pas entiers qui a la forme (2.86) dans tout G , c'est-à-dire que l'ordre d'approximation est $0(\tau) + 0(h^2)$ pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$ et $0(\tau^2) + 0(h^2)$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

Montrons que pour la récurrence le long de la frontière nous faisons une erreur sur les conditions initiales d'ordre 0 (τ). Montrons ceci, par exemple, pour γ_1, γ_4 .

Au $n^{\text{ième}}$ pas sur γ_2, γ_4 nous avons $u^n = f^n$; $u^{n+\frac{1}{2}}$ se détermine par la condition (2.85 a), qui peut s'écrire sous la forme :

$$A_1 u^{n+\frac{1}{2}} = B_1 u^n = B_1 f^n \quad |2.95|$$

La relation de récurrence (2.95) se complète par la condition aux limites :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = f^{n+\frac{1}{2}} \text{ pour } x_1 = 0 \text{ et } 1 \quad |2.96|$$

Soustrayant à la relation (2.95) l'identité :

$$A_1 f^{n+\frac{1}{2}} = A_1 f^{n+\frac{1}{2}}$$

et posant $v^{n+\frac{1}{2}} = u^{n+\frac{1}{2}} - f^{n+\frac{1}{2}}$, on trouve :

$$A_1 v^{n+\frac{1}{2}} = B_1 f^n - A_1 f^{n+\frac{1}{2}} = F^n \quad |2.97|$$

avec les conditions aux limites :

$$v^{n+\frac{1}{2}} = 0 \text{ pour } x_1 = 0, x_1 = 1 \quad |2.98|$$

De (2.97), on tire : $v^{n+\frac{1}{2}} = A_1^{-1} F^n$

Mais $\|F^n\| = 0(\tau)$, $\|A_1^{-1}\| < 1$,

par conséquent : $\|v^{n+\frac{1}{2}}\| = 0(\tau)$ |2.99|

Par conséquent, au cours de la récurrence sur x_1 , nous effectuons une récurrence sur $\gamma_2 \cup \gamma_4$ en nous éloignant des véritables conditions aux limites d'une quantité $0(\tau)$ et en conservant les véritables conditions aux limites sur $\gamma_1 \cup \gamma_3$; au cours de la récurrence sur x_2 , au contraire, s'effectue une récurrence sur $\gamma_1 \cup \gamma_3$ en s'éloignant des conditions aux limites d'une quantité $0(\tau)$ et en conservant les conditions aux limites sur $\gamma_2 \cup \gamma_4$.

Au total, on a la précision $0(\tau) + 0(h^2)$.

Étudions, enfin, un troisième procédé pour satisfaire les conditions aux limites correspondant à la réalisation (2.87) du schéma (2.86).

Pour la récurrence sur x_1 de $u^{n+\frac{1}{2}}$ il est indispensable de connaître $u^{n+\frac{1}{2}}$ sur $\gamma_1 \cup \gamma_3$.

Cette connaissance de $u^{n+\frac{1}{2}}$ se détermine par la relation (2.87 b) qui, sur $\gamma_1 \cup \gamma_3$, devient :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = (E - \beta \tau \Lambda_2) f^{n+1} \quad |2.100|$$

Le calcul s'effectue dans l'ordre suivant : de la relation (2.100) on tire $u^{n+\frac{1}{2}}$ sur $\gamma_1 \cup \gamma_3$, après quoi on résout l'équation (2.88 a) par récurrence, obtenant de cette façon $u^{n+\frac{1}{2}}$ dans G on résout par récurrence (2.88 b) posant sur $(\gamma_2 \cup \gamma_4)$:

$$u^{n+1} = f^{n+1} \quad |2.101|$$

Par conséquent, partout dans G est vérifiée l'équation (2.86) à pas entiers, alors que sur γ est vérifiée la relation :

$$u^n = f^n, \quad u^{n+1} = f^{n+1} \quad (C)$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ le schéma (C) donne l'ordre d'approximation $0(\tau^2) + 0(h^2)$.

Comparons maintenant le calcul des frontières par les méthodes (A), (B), (C).

La méthode (A) est explicitement non satisfaisante. La méthode (C) est supérieure à la méthode (B) en précision mais la méthode (B) est plus générale.

En effet, examinons le domaine G limité par le contour quelconque (voir fig. 2.3).

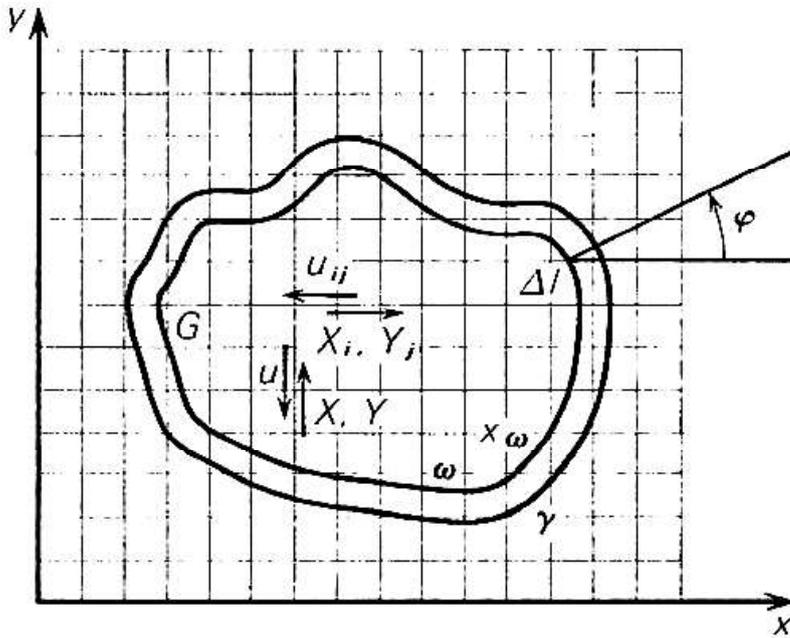


FIGURE 2. 3. Méthode (B) pour un domaine quelconque G .

Dans ce cas, la méthode (C) n'est pas applicable. La méthode (B) est applicable en vertu de : pour la résolution de l'équation (3.85 a) on effectue la récurrence sur des lignes horizontales du maillage avec des conditions aux limites sur les bouts des lignes horizontales; pour la résolution de l'équation (3.85 b) on effectue la récurrence sur des lignes verticales du maillage avec des conditions aux limites sur les bouts des lignes verticales. De plus les bouts des lignes horizontales et verticales ne coïncident pas obligatoirement, c'est-à-dire que la frontière ne contient pas obligatoirement que des points du maillage (*maillage non accordé*).

La méthode (C) devient non-applicable même dans le cas d'un domaine constitué par un nombre fini de rectangles. Par exemple pour le domaine représenté par la fig. 2.4,

pour les points d'angles A, B, C, D, E, F, la grandeur $u^{n+\frac{1}{2}}$ ne peut être définie, par conséquent, la récurrence sur $D_1 D$ est impossible. Dans ce cas, la méthode (C) se réalise de la façon suivante. A l'aide des formules (2.100), on définit $u^{n+\frac{1}{2}}$ sur AB, CD, EF, (voir fig. 2.4. ci-après).

Après quoi, on effectue la récurrence sur x_1 sur toutes les lignes horizontales intérieures du maillage, exceptée la ligne $D_1 D$, et dans tout le domaine G , excepté $D_1 D$, on définit

$u^{n-\frac{1}{2}}$ Puis on effectue la récurrence sur x_2 dans DEF D_2 et u^{n+1} est défini partout dans

DEF D_2 , en particulier au point D_3 . A l'aide de (2.100), on définit $u^{n+\frac{1}{2}}$, au point D,

on effectue la récurrence $u^{n+\frac{1}{2}}$ sur $D_1 D$, après quoi devient possible la définition de

$u^{n-\frac{1}{2}}$ sur ABCD $_2$, à l'aide de récurrence sur x_2 . Il est clair qu'avec l'augmentation du

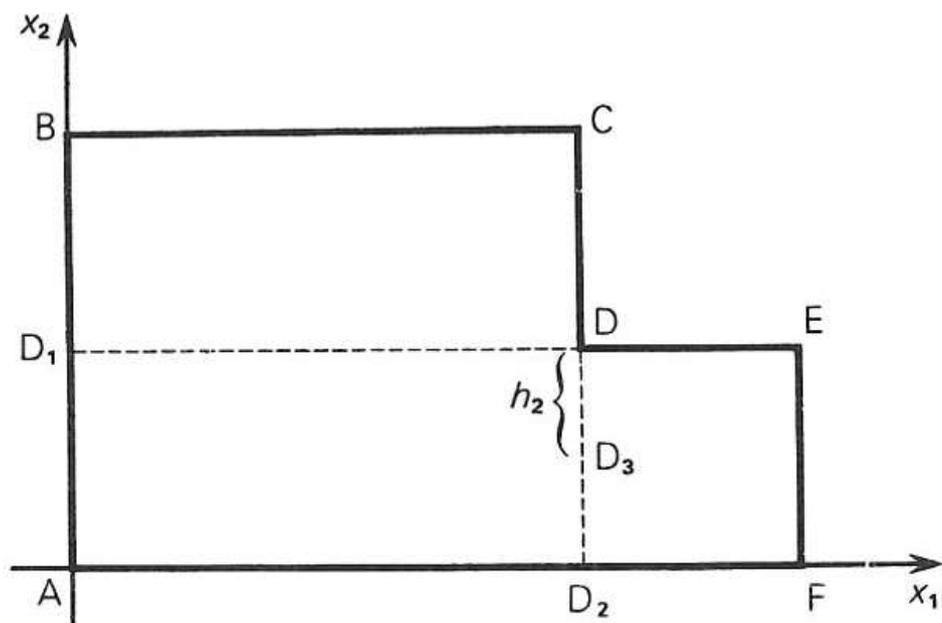


FIGURE 2.4. Réalisation de la méthode (C) dans le domaine G constitué par des rectangles.

nombre des points d'angles l'algorithme devient de plus en plus volumineux. La méthode (B), elle, reste applicable.

N. N. Anoutchine a proposé dans une communication privée une méthode plus générale d'étude des conditions aux limites pour les méthodes à pas fractionnaires (méthode des fonctions inconnues¹). Illustrons cette méthode en prenant comme exemple les schémas de désintégration.

Désignons les valeurs de u^n et $u^{n+\frac{1}{2}}$ sur la frontière γ par ψ^n et φ^n . Il est clair que les quantités ψ^n , φ^n ne coïncident pas obligatoirement avec f^n , $f^{n+\frac{1}{2}}$. La relation (2.85) prend sur γ la forme (2.88) où :

$$\left[\begin{array}{l} F_1^n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\tau} - \Lambda_1 (\alpha \varphi^n + \beta \psi^n) = \frac{1}{\tau} (A_1 \varphi^n - B_1 \psi^n) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (x_1, x_2) \in \gamma_2 \cup \gamma_4 \\ F_2^n = \frac{\psi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} - \Lambda_2 (\alpha \psi^{n+1} + \beta \varphi^n) = \frac{1}{\tau} (A_2 \psi^{n+1} - B_2 \varphi^n) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cup \gamma_3 \end{array} \right] \quad |2.102|$$

Le schéma équivalent en pas entiers a la forme :

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_1 B_2 u^n = R^n \quad |2.103|$$

1. Des résultats analogues ont été obtenus de façon indépendante par S. A. KRIAKVINE. A propos des conditions aux limites, cf. également les travaux de A. A. SAMARSKY [63], [91].

$R^n = 0$ partout dans G , excepté sur ω , où :

$$\left. \begin{aligned} R^n &= B_2 (A_1 \varphi^n - B_1 \psi^n), & (x_1, x_2) \in \omega_2 \cup \omega_4 \\ R^n &= A_1 (A_2 \psi^{n+1} - B_2 \varphi^n), & (x_1, x_2) \in \omega_1 \cup \omega_3 \end{aligned} \right] \quad |2.104|$$

Le problème consiste à choisir les fonctions ψ^n, φ^n de façon à minimiser l'erreur R^n .

Il a déjà été montré que le choix trivial $\psi^n = f^n, \varphi^n = f^{n+\frac{1}{2}}$ conduit à la variante (A), donnant une précision faible.

Pour que R^n soit nul partout dans G , y compris ω , il est nécessaire et suffisant que :

$$\left. \begin{aligned} A_1 \varphi^n - B_1 \psi^n &= 0, & (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cup \gamma_3 & \quad (a) \\ A_2 \psi^{n+1} - B_2 \varphi^n &= 0, & (x_1, x_2) \in \gamma_2 \cup \gamma_4 & \quad (b) \end{aligned} \right] \quad |2.105|$$

$$\text{Si l'on pose : } \psi^n = f^n, \quad \psi^{n+1} = f^{n+1}, \quad (x_1, x_2) \in \gamma \quad |2.106|$$

alors l'équation (2.105) permet de définir φ^n .

Cependant, l'équation (2.105 a) se trouve être mal conditionnée et on ne peut pas la résoudre par récurrence.

En conservant la supposition (2.106) choisissons φ^n de façon à ce que $R^n = 0$ (τ^2). Pour cela il suffit, par exemple, de poser :

$$\left. \begin{aligned} \varphi^n &= (E + k_1 \tau \Lambda_1) \psi^n, & (x_1, x_2) \in \omega_2 \cup \omega_4 \\ \varphi^n &= (E + k_2 \tau \Lambda_2) \psi^{n+1}, & (x_1, x_2) \in \omega_1 \cup \omega_3 \end{aligned} \right] \quad |2.107|$$

Choisissons les constantes k_1, k_2 pour que :

$$\left. \begin{aligned} R^n &= B_2 (A_1 \varphi^n - B_1 \psi^n) = 0 \quad (\tau^2), & (x_1, x_2) \in \omega_2 \cup \omega_4 \\ R^n &= A_1 (A_2 \psi^{n+1} - B_2 \varphi^n) = 0 \quad (\tau^2), & (x_1, x_2) \in \omega_1 \cup \omega_3 \end{aligned} \right] \quad |2.108|$$

Pour $k_1 = 1, k_2 = -1$, on a :

$$\left. \begin{aligned} R^n &= -\frac{\alpha \beta \tau}{h_2^2} \tau^2 \Lambda_1^2 f^n, & (x_1, x_2) \in \omega_2 \cup \omega_4 \\ R^n &= -\frac{\alpha \beta \tau}{h_1^2} \tau^2 \Lambda_1^2 f^{n+1}, & (x_1, x_2) \in \omega_1 \cup \omega_3 \end{aligned} \right] \quad |2.109|$$

Avec la loi de passage à la limite $\frac{\tau}{h_1^2} = \text{const.}, \frac{\tau}{h_2^2} = \text{const.}$ et une fonction f suffisamment régulière, nous obtenons la précision demandée. Remarquons, cependant, que la consistance (2.109) n'est pas absolue.

De plus, si f^n est une fonction discontinue, l'ordre de consistance de (2.109) diminue. Posons maintenant (méthode B) :

$$\left. \begin{aligned} \varphi^n &= f^{n+\frac{1}{2}}, & (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cup \gamma_3 \\ A_1 \varphi^n - B_1 f^n &= 0, & (x_1, x_2) \in \gamma_2 \cup \gamma_4 \\ \psi^{n+1} &= f^{n+1}, & (x_1, x_2) \in \gamma_2 \cup \gamma_4 \end{aligned} \right] \quad |2.110|$$

$$A_2 \psi^{n+1} - B_1 f^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cup \gamma_3 \quad |2.111|$$

Comme dans le cas (2.105), on a $R^n = 0$, mais contrairement au cas (2.105), de (2.110) on tire ψ^{n+1} et non φ^n .

Les formules (2.110), (2.111) donnent l'ordre de consistance $0(\tau) + 0(h^2)$ indépendamment de la loi de passage à la limite et de la régularité de f^n .

De façon analogue se déduisent d'autres schémas à pas fractionnaires.

On peut appliquer la méthode des fonctions inconnues dans le cas des frontières curvilignes, dans le cas des frontières concaves, et dans le cas des équations à structures plus compliquées.

On peut donner à la méthode des fonctions inconnues une formulation plus générale. Étudions à titre d'exemple le schéma de désintégration. Posons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n \right) + q_1^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}} \right) + q_2^n \end{aligned} \right\} \quad [2.112]$$

avec les fonctions inconnues pour le moment q_1, q_2 .

Éliminant $u^{n+\frac{1}{2}}$ entre les équations (2.112), on trouve :

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1)(E - \alpha \tau \Lambda_2) u^{n+1} = (E + \beta \tau \Lambda_1)(E + \beta \tau \Lambda_2) u^n + R \quad [2.113]$$

$$R = \tau [(E + \beta \tau \Lambda_2) q_1 + (E - \alpha \tau \Lambda_1) q_2] \quad [2.114]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Exigeons que : } R &= 0, \quad (x_1, x_2) \in G \\ q_1 &= 0, \quad (x_1, x_2) \in G \end{aligned} \right\} \quad [2.115]$$

Montrons que les conditions (2.115) associées aux conditions aux limites déterminent q_2 de façon unique.

Choisissons, pour la détermination, la réalisation (A). Alors, avec les formules (2.90 b) :

$$\left. \begin{aligned} q_1^n &= g_1^n = A_1 f^{n+\frac{1}{2}} - B_1 f^n, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2 \cup \gamma_4 \\ q_2^n &= g_2^n = A_2 f^{n+1} - B_2 f^n, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cup \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad [2.116]$$

q_2 se détermine pour les points de G par les équations :

$$(E + \beta \tau \Lambda_2) q_1^n + (E - \alpha \tau \Lambda_1) q_2^n = 0 \quad [2.117]$$

qui sont résolubles par rapport à q_2 , en vertu de l'inversibilité de l'opérateur $A_1 = E - \alpha \tau \Lambda_1$.

Remarquons que, pour les points appartenant à $\omega_2 \cup \omega_4$, les équations (2.117) prennent la forme :

$$\frac{\beta \tau}{h_2^2} g_1^n + (E - \alpha \tau \Lambda_1) q_2^n = 0$$

et, pour les autres points de G , la forme : $(E - \alpha \tau \Lambda_1) q_2^n = 0$.

Il est clair qu'une façon analogue d'introduire des fonctions inconnues — seconds membres q_1, q_2 — peut être appliquée à n'importe quel schéma à pas fractionnaires.

Étudions maintenant les conditions aux limites pour des frontières curvilignes.

Dans le cas du premier problème aux limites (cf. chap. 2.1), la méthode (B) est applicable également à une frontière curviligne. Des difficultés beaucoup plus grandes

apparaissent au cours de la résolution du problème de Cauchy avec des conditions aux limites du second ordre. Alors à la place de (2.1 a) nous avons (cf. fig. 2.3) :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Gamma \quad |2.118|$$

Indiquons un algorithme de résolution des conditions aux limites (2.84). Soit u^n une solution aux différences du problème de Cauchy pour l'équation (2.84) avec les conditions aux limites (2.118), définie dans le domaine \bar{G} au moment $t = n \tau$. Déterminons u^{n+1} , utilisant la détermination déjà effectuée de $u^n(\gamma)$. Pour cela il faut appliquer le schéma de désintégration (2.85) avec les conditions aux limites :

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{\gamma = u^n(\gamma)} \quad |2.119|$$

Après cela, utilisant (2.118), corrigeons les conditions aux limites de u^{n+1} . Désignons par ω l'ensemble des points du maillage proches de γ . Donnant dans ω la signification de u^{n+1} déterminée par (2.85), résolvons sur γ l'équation (2.118). Ceci peut se réaliser, par exemple, en abaissant des points de ω la normale à γ (cf. fig. 2.3) et utilisant la relation :

$$u^{n+1}(x_\gamma) - u^{n+1}(x_\omega) = \Delta l \cdot f^{n+1}(x_\omega) \quad |2.120|$$

où $f^{n+1}(x_\omega)$ est une approximation de $f(x_1, x_2, t)$ de (2.118).

Après quoi, on résout de nouveau l'équation (2.85) avec les conditions aux limites de (2.119). Après les itérations, on passe au pas suivant.

A propos de la résolution des problèmes aux limites du second ordre dans le cas des équations avec un vecteur-fonction inconnu, cf. ch. 5.

3. Application de la méthode des pas fractionnaires aux équations hyperboliques

3.1 Schémas très simples pour les équations hyperboliques unidimensionnelles

Étudions les équations de l'acoustique :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad |3.1|$$

Dans (3.1.), u est la vitesse,
 v le volume spécifique,
 a la vitesse du son,
 x les coordonnées de Lagrange.

Écrit avec les invariants de Riemann :

$$r = u - av \qquad s = u + av, \quad |3.2|$$

le système (3.1) prend la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad |3.3|$$

Nous allons étudier les schémas de base suivants d'intégration de (3.1) ou, ce qui revient au même, de (3.3) :

3.1.1 Schéma du calcul courant

Le schéma explicite de calcul courant a la forme :

$$\frac{\Delta_0 r}{\tau} + a \frac{\Delta_{-1} r}{h} = 0 ; \quad \frac{\Delta_0 s}{\tau} - a \frac{\Delta_1 s}{h} = 0 \quad |3.4|$$

$$\Delta_0 = T_0 - E, \quad \Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1}$$

où les opérateurs de translation T_1 , T_{-1} sont définis par la relation (1.13) et l'opérateur T_0 de translation sur t est défini de façon analogue :

$$T_0 f(x, t) = f(x, t + \tau); \quad T_{-0} f(x, t) = f(x, t - \tau) \quad |3.5|$$

Passons à la notation indicée :

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} + a \frac{r_i^n - r_{i-1}^n}{h} &= 0 \\ \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} - a \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{h} &= 0 \end{aligned} \right\} |3.6|$$

Avec les variables u et v , le schéma (3.4) a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta_0 u}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} v &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u \\ \frac{\Delta_0 v}{\tau} - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} v \end{aligned} \right\} |3.7|$$

Il est facile de déterminer l'opérateur de passage du schéma (3.4) :

$$\left. \begin{aligned} r^{n+1} &= Cr^n, \quad C = E - \frac{a\tau}{h} \Delta_{-1} \\ s^{n+1} &= Ds^n, \quad D = E + \frac{a\tau}{h} \Delta_1 \end{aligned} \right\} |3.8|$$

et, en u et v :

$$\left. \begin{aligned} u^{n+1} &= \frac{C+D}{2} u^n - a \frac{C-D}{2} v^n \\ v^{n+1} &= -\frac{C-D}{2a} u^n + \frac{C+D}{2} v^n \end{aligned} \right\} |3.9|$$

Le schéma implicite écrit avec des poids α_s , β_s a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\Delta_0}{\tau} (\alpha_1 T_{-1} + \beta_1 E) + a \frac{\Delta_{-1}}{h} (\alpha_2 T_0 + \beta_2 E) \right] r &= 0 \\ \left[\frac{\Delta_0}{\tau} (\alpha_1 T_1 + \beta_1 E) - a \frac{\Delta_1}{h} (\alpha_2 T_0 + \beta_2 E) \right] s &= 0 \\ \alpha_s \geq 0, \beta_s \geq 0, \alpha_s + \beta_s &= 1, s = 1, 2 \end{aligned} \right\} |3.10|$$

Repassant à la notation indiquée, nous avons :

$$\left[\begin{array}{l} \left(\alpha_1 \frac{r_{i-1}^{n+1} - r_{i-1}^n}{\tau} + \beta_1 \frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} \right) + a \left(\alpha_2 \frac{r_i^{n+1} - r_{i-1}^{n+1}}{h} + \beta_2 \frac{r_i^n - r_{i-1}^n}{h} \right) = 0 \\ \left(\alpha_1 \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_{i+1}^n}{\tau} + \beta_1 \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} \right) - a \left(\alpha_2 \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h} + \beta_2 \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{h} \right) = 0 \end{array} \right] \quad |3.11|$$

L'opérateur de passage du schéma (3.10) a la forme :

$$r^{n+1} = Cr^n, \quad s^{n+1} = Ds^n \quad |3.12|$$

avec :

$$\left[\begin{array}{l} C = \left(\alpha_1 T_{-1} + \beta_1 E + a\alpha_2 \tau \frac{\Delta_{-1}}{h} \right)^{-1} \left(\alpha_1 T_{-1} + \beta_1 E - a\beta_2 \tau \frac{\Delta_{-1}}{h} \right) \\ D = \left(\alpha_1 T_1 + \beta_1 E - a\alpha_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right)^{-1} \left(\alpha_1 T_1 + \beta_1 E + a\beta_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right) \end{array} \right] \quad |3.13|$$

Le passage aux variables u e v donne de nouveau la forme (3.9) mais avec C et D tirés de (3.13).

Le schéma pondéré (3.10) nous donne les formules connues du calcul courant, entre autres le schéma majorant explicite ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$), le schéma majorant implicite¹⁾ ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 0$), et le schéma du second ordre de précision ($\alpha_s = \beta_s = \frac{1}{2}, s = 1,2$).

3.1.2 Schéma de la « croix »

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-1} v^n}{h} = 0, \quad \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1 u^{n+1}}{h} = 0 \quad |3.14|$$

3.1.3 Schéma implicite pondéré

$$\left[\begin{array}{l} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - a \frac{\Delta_{-1}}{h} (\alpha_1 v^{n+1} + \beta_1 v^n) = 0 \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h} (\alpha_2 u^{n+1} + \beta_2 u^n) = 0 \end{array} \right] \quad |3.15|$$

1. Nous appelons « majorant » un schéma à coefficients positifs (cf. [28]). Dans le cas des coefficients constants, ces schémas satisfont la condition de l'extrémum et de stabilité dans \mathcal{C} .

Avec $\alpha_s = \beta_s = \frac{1}{2}$ ($s = 1, 2$), (3.15) est du second ordre de précision (schéma de Neumann); avec $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 1$, (3.15) devient le schéma de la croix. Nous prendrons les schémas (3.9), (3.14) et (3.15) comme base pour la construction de schémas simples d'intégration des équations polydimensionnelles de l'acoustique et de l'équation des ondes.

3.2 Schémas implicites homogènes pour les équations de type hyperbolique

Pour les équations paraboliques ayant un domaine de dépendance infini, l'approximation implicite, comme l'a fait remarquer pour la première fois Laasonen [29], est naturelle parce que dans ce cas le domaine de dépendance sera infini également pour l'équation aux différences.

Contrairement aux paraboliques, les équations hyperboliques ont un domaine de dépendance fini, aussi semblerait-il naturel de prendre une approximation explicite. Cependant il n'en est pas ainsi.

Comme le montre le critère connu de Courant, les exigences de stabilité se déterminent par les dimensions des grandeurs en un point donné.

En même temps, les exigences de précision se déterminent par les gradients. Dans le cas d'un courant avec des petits gradients (flux d'une rivière, flux atmosphérique, etc.), le pas τ , déterminé par les exigences de précision, est beaucoup plus grand que le pas déterminé par les exigences de stabilité. D'où la nécessité d'utiliser des schémas implicites également pour les équations hyperboliques.

Le schéma implicite pour les équations de l'hydrodynamique, issu de la méthode à calcul courant, fut proposé pour la première fois par L. D. Landau, N. N. Meïman et I. M. Khalatnikoff (cf. [30]). Les premières bases théoriques des schémas implicites pour les équations des ondes à coefficients variables furent données par O. A. Ladyjenskaïa [31]. Les schémas implicites pour les équations de l'hydrodynamique ont obtenu aujourd'hui une grande expansion (cf. [32-35]).

3.3 Schémas implicites pour les équations polydimensionnelles hyperboliques

La méthode de désintégration pour les systèmes hyperboliques polydimensionnels fut proposée pour la première fois dans l'article de A. A. Bagrinovskiy et S. K. Godounov [36]. Les auteurs de cet article étudient seulement l'approximation explicite pour laquelle le schéma de désintégration n'offre pas beaucoup d'avantages sur les schémas explicites habituels.

L'ouvrage [37] d'Anoutchine et de l'auteur propose un schéma implicite de désintégration pour les systèmes hyperboliques polydimensionnels. Examinons l'équation de l'acoustique bidimensionnelle :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) &= 0 \end{aligned} \right] \quad |3.16|$$

Écrivons (3.16) sous forme matricielle : $\frac{\partial f}{\partial t} = Af$ |3.17|

avec $f = \{ u_1, u_2, v \}$

et

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & a^2 D_1 \\ 0 & 0 & a^2 D_2 \\ D_1 & D_2 & 0 \end{array} \right\|, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad |3.18|$$

Construisons un schéma de désintégration basé sur le schéma implicite à une dimension (3.15). Au premier pas fractionnaire, abaissant les gradients dans la direction x_2 , nous obtenons le schéma :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1^{n+\frac{1}{2}} - u_1^n}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} \left(\alpha v^{n+\frac{1}{2}} + \beta v^n \right) &= 0 \\ \frac{u_2^{n+\frac{1}{2}} - u_2^n}{\tau} &= 0 \\ \frac{v^{n+\frac{1}{2}} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h_1} \left(\alpha u_1^{n+\frac{1}{2}} + \beta u_1^n \right) &= 0 \end{aligned} \right] \quad |3.19|$$

Au second pas fractionnaire, abaissant les gradients dans la direction x_1 , nous obtenons le schéma :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1^{n+1} - u_1^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= 0 \\ \frac{u_2^{n+1} - u_2^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} \left(\alpha v^{n+1} + \beta v^{n+\frac{1}{2}} \right) &= 0 \\ \frac{v^{n+1} - v^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} - \frac{\Delta_2}{h_2} \left(\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+\frac{1}{2}} \right) &= 0 \end{aligned} \right] \quad |3.20|$$

Pour simplifier, nous poserons $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

Il est clair que le schéma de désintégration (3.19), (3.20) est absolument stable pour $\alpha \geq 1/2$. Nous allons montrer que ce schéma est consistant au système (3.16) ou, ce qui revient au même, à l'équation suivante équivalente au système (3.16) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \right] = 0 \quad |3.21|$$

que vérifie chacune des quantités u_1, u_2, v .

Nous allons montrer la consistance à l'aide de la méthode d'élimination. Éliminant entre (3.19) et (3.20) les grandeurs $u_1^{n+\frac{1}{2}}, u_2^{n+\frac{1}{2}}$, nous obtenons quatre équations opérationnelles avec les quatre inconnues $u_1^n, u_2^n, v^n, v^{n+\frac{1}{2}}$ que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{T_0 - E}{\tau} & 0 & -\beta a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} & -\alpha a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} \\ -\frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha T_0 + \beta E) & 0 & -\frac{1}{\tau} E & \frac{1}{\tau} E \\ 0 & \frac{T_0 - E}{\tau} & -\alpha a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 & -\beta a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} \\ 0 & -\frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha T_0 + \beta E) & \frac{1}{\tau} T_0 & -\frac{1}{\tau} E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ v^n \\ v^{n+\frac{1}{2}} \end{vmatrix} \quad |3.22|$$

Éliminant $v^{n+\frac{1}{2}}$ entre les équations (3.22), on obtient le système :

$$\begin{cases} \left[\frac{T_0 - E}{\tau} - \alpha \tau a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} (\alpha T_0 + \beta E) \right] u_1^n - a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} v^n = 0 \\ \left[\frac{T_0 - E}{\tau} + \beta \tau a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha T_0 + \beta E) \right] u_2^n - a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 v^n = 0 \\ \frac{T_0 - E}{\tau} v^n - \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha T_0 + \beta E) u_1^n - \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha T_0 + \beta E) u_2^n = 0 \end{cases} \quad |3.23|$$

que l'on peut écrire aussi sous forme matricielle :

$$\frac{T_0 - E}{\tau} f^n = B f^n, \quad f^n = \{ u_1^n, u_2^n, v^n \} \quad |3.24|$$

avec

$$B = \begin{vmatrix} \alpha \tau a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} (\alpha T_0 + \beta E) & 0 & a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} \\ 0 & -\beta \tau a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha T_0 + \beta E) & a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 \\ \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha T_0 + \beta E) & \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha T_0 + \beta E) & 0 \end{vmatrix} \quad |3.25|$$

On voit facilement que le schéma (3.24) est consistant à (3.17). On peut démontrer la consistance de plusieurs manières différentes. Égalant à 0 le déterminant du système opérationnel (3.22), nous obtenons une équation opérationnelle du troisième ordre pour n'importe laquelle des grandeurs $f^n = u_1^n, u_2^n, v^n, v^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\left[\left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right)^3 - a^2 \frac{T_0 - E}{\tau} (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} - a^2 \left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right) (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} + a^4 \tau (\alpha^2 T_0 - \beta^2 E) (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_2 \Delta_{-2}}{h_1^2 h_2^2} \right] f^n = 0 \quad |3.26|$$

Le schéma (3.26) est consistant à l'équation :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) + \tau \mathcal{L} f \quad |3.27|$$

où \mathcal{L} est un certain opérateur, c'est-à-dire que (3.26) est consistant à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \right] = 0 \quad |3.28|$$

Prenons $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Alors (3.26) devient :

$$(T_0 - E) \left[\left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right)^2 - \frac{a^2}{4} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} - \frac{a^2}{4} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} + \frac{a^4 \tau^2}{16} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \cdot \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right] f^n = 0 \quad |3.29|$$

Après simplification par $(T_0 - E)$, nous obtenons l'équation du second ordre :

$$\frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \left[\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} + \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right] \frac{f^{n-1} + 2f^n + f^{n+1}}{4} - \frac{a^4}{16} \tau^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_2 \Delta_{-2}}{h_1^2 h_2^2} (f^{n-1} + 2f^n + f^{n+1}) \quad |3.30|$$

qui a la précision 0 ($\tau^2 + h^2$).

Montrons que le schéma (3.30) se réalise à l'aide de récurrences tridiagonales simples. Choissant pour f^n la grandeur v^n (volume spécifique), des deux premières équations de (3.22) on tire après élimination de u_1^n :

$$\frac{v^{n+\frac{3}{2}} - v^{n+1} - v^{n+\frac{1}{2}} + v^n}{\tau^2} = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \left[a^2 v^{n+\frac{3}{2}} + \alpha \beta v^{n+1} + \alpha \beta v^{n+\frac{1}{2}} + \beta^2 v^n \right] \quad |3.31|$$

Des deux dernières équations de (3.22) nous avons, après élimination de u_2^n :

$$\frac{v^{n+2} - v^{n+\frac{3}{2}} - v^{n+1} + v^{n+\frac{1}{2}}}{\tau^2} = a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \left[\alpha^2 v^{n+2} + \alpha\beta v^{n+\frac{3}{2}} + \alpha\beta v^{n+1} + \beta^2 v^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.32)$$

Pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, les équations (3.31), (3.32) réalisent l'équation (3.31).

3.4 Schéma de désintégration à calcul courant

Appliquons au système (3.16) à chaque pas fractionnaire le schéma à calcul courant (3.9), (3.13); nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{n+\frac{1}{2}} = \sigma_1 f^n \\ f^{n+1} = \sigma_2 f^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

avec :

$$\sigma_1 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{C_1 + D_1}{2} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2} \\ 0 & E & 0 \\ -\frac{C_1 - D_1}{2a} & 0 & \frac{C_1 + D_1}{2} \end{array} \right\|$$

$$\sigma_2 = \left\| \begin{array}{ccc} E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{2} \\ 0 & -\frac{C_2 - D_2}{2a} & \frac{C_2 + D_2}{2} \end{array} \right\| \quad (3.34)$$

Les opérateurs C_s , D_s , d'après (3.13), s'expriment sous la forme :

$$\left. \begin{array}{l} C_s = \left[\alpha_1 T_{-s} + \beta_1 E + \alpha_2 a\tau \frac{\Delta_{-s}}{h_s} \right]^{-1} \left[\alpha_1 T_{-s} + \beta_1 E - \beta_2 a\tau \frac{\Delta_{-s}}{h_s} \right] \\ D_s = \left[\alpha_1 T_s + \beta_1 E - \alpha_2 a\tau \frac{\Delta_s}{h_s} \right]^{-1} \left[\alpha_1 T_s + \beta_1 E + \beta_2 a\tau \frac{\Delta_s}{h_s} \right] \end{array} \right\} \quad s = 1, 2 \quad (3.35)$$

Donc l'opérateur de passage σ du schéma à pas entiers :

$$f^{n+1} = \sigma f^n \quad |3.36|$$

s'exprime par le produit de matrices $\sigma_2 \sigma_1$:

$$\sigma = \sigma_2 \sigma_1 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{C_1 + D_1}{2} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2} \\ \frac{C_2 - D_2}{2} \cdot \frac{C_1 - D_1}{2} & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a^2 \frac{C_2 - D_2}{2} \frac{C_1 + D_1}{2} \\ -\frac{(C_2 + D_2)(C_1 - D_1)}{4a} & -\frac{C_2 - D_2}{2a} & \frac{C_2 + D_2}{2} \cdot \frac{C_1 + D_1}{2} \end{array} \right\| \quad |3.37|$$

Montrons que la matrice :

$$\frac{\sigma - E}{\tau} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\frac{C_1 + D_1}{2} - E}{\tau} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2\tau} \\ \frac{(C_2 - D_2)(C_1 - D_1)}{4\tau} & \frac{C_2 + D_2 - E}{\tau} & -a \frac{(C_2 - D_2)(C_1 + D_1)}{4\tau} \\ -\frac{(C_2 + D_2)(C_1 - D_1)}{4a\tau} & -\frac{C_2 - D_2}{2a\tau} & \frac{(C_2 + D_2)(C_1 + D_1) - E}{\tau} \end{array} \right\| \quad |3.38|$$

approche la matrice A de (3.18).

Il est facile de montrer que :

$$\frac{C_i + D_i}{2} \sim E; \quad \frac{\frac{C_i + D_i}{2} - E}{\tau} \sim 0; \quad \frac{C_i - D_i}{2a\tau} \sim -\frac{\Delta_i}{h_i} \quad |3.39|$$

D où : $\frac{\sigma - E}{\tau} \sim A$, *c.q.f.d.*

Comme chacun des schémas à pas courants est stable, on a :

$$\|\sigma_1\| \leq 1, \quad \|\sigma_2\| \leq 1 \quad |3.40|$$

Par conséquent, on a $\|\sigma\| < 1$ |3.41|

Par conséquent, le schéma de désintégration à pas courants converge vers le système (3.18).

Faisons quelques remarques :

a) Bien que les schémas homogènes à calcul courant puissent avoir un second ordre d'approximation (pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$), le schéma de désintégration à pas entiers n'est pas symétrique et pour cela non suffisamment précis.

Pour augmenter la précision, il faut symétriser le schéma (3.36).

$$\text{Pour cela, posons }^1 : \Sigma = \frac{\sigma + \sigma^*}{2} = \frac{\sigma_2 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2}{2} \quad |3.42|$$

$$\sigma^* = \sigma_1 \sigma_2 = \begin{vmatrix} \frac{C_1 + D_1}{2} & \frac{(C_1 - D_1)(C_2 - D_2)}{4} & -a \frac{(C_1 - D_1)(C_2 + D_2)}{4} \\ 0 & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{2} \\ -\frac{C_1 - D_1}{2a} & -\frac{(C_1 + D_1)(C_2 - D_2)}{4a} & \frac{(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}{4} \end{vmatrix} \quad |3.43|$$

Alors l'opérateur de passage Σ a la forme symétrique :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \frac{C_1 + D_1}{2} & \frac{(C_1 - D_1)(C_2 - D_2)}{4 \times 2} & -a \frac{(C_1 - D_1)(C_2 + D_2 + 2E)}{4 \times 2} \\ \frac{(C_2 - D_2)(C_1 - D_1)}{4 \times 2} & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{(C_2 - D_2)(C_1 + D_1 + 2E)}{4 \times 2} \\ \frac{C_2 + D_2 + 2E}{2} \cdot \frac{C_1 - D_1}{4a} & -\frac{C_1 + D_1 + 2E}{2} \cdot \frac{C_2 - D_2}{4a} & \frac{(C_2 + D_2)(C_1 + D_1)(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}{4 \times 2} \end{vmatrix} \quad |3.44|$$

b) Dans la multiplication des opérateurs matriciels, il convient de faire le produit de leurs éléments (ce sont des opérateurs) en tenant compte de leur possible non-commutativité.

3.5 Méthode de factorisation approchée pour l'équation des ondes

Au cours des paragraphes précédents, nous avons étudié les schémas à pas fractionnaires pour l'équation de l'acoustique (3.16).

Nous avons remarqué que les grandeurs u_1, u_2, v vérifient l'équation (3.21). La grandeur v vérifie l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad |3.45|$$

Par conséquent le schéma à quatre niveaux d'intégration de (3.26) que nous avons indiqué ou alors le schéma équivalent en pas fractionnaires (3.31, 3.32) peuvent être simplifiés en application à v . E. G. Diakonov a proposé un schéma d'intégration de (3.45) à trois niveaux, basé sur la méthode de factorisation approchée d'un opérateur.

1. Cette proposition appartient à S. K. GODOUNOV, A. V. ZABRODINE [38]. Un autre procédé de symétrisation a été proposé par A. A. SAMARSKY [94].

Soit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}}{\tau^2} &= \Lambda \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_s = a^2 \frac{\Delta_s \Delta_{-s}}{h_s^2}, \quad s = 1, 2 \end{aligned} \right] \quad |3.46|$$

un schéma homogène de second ordre de précision consistant à (3.45).

Écrivons (3.46) sous la forme :

$$\left(E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda \right) \left(\frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} \right) = v^n \quad |3.47|$$

Factorisons de manière approchée l'opérateur du premier membre de (3.47) :

$$E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda \sim \left(E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda_1 \right) \left(E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda_2 \right) \quad |3.48|$$

Remplaçons dans (3.47) :

$$\left(E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda_1 \right) \left(E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda_2 \right) \left(\frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} \right) = v^n \quad |3.49|$$

Le schéma (3.49) est réalisé par les deux récurrences :

$$\left. \begin{aligned} \left(E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda_1 \right) v^{n+\frac{1}{2}} &= v^n \\ \left(E - \frac{1}{2} \tau^2 \Lambda_2 \right) \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} &= v^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right] \quad |3.50|$$

On voit facilement que le schéma (3.49) est stable et du second ordre de précision. Des schémas de désintégration pour l'équation des oscillations furent construits par A. N. Konovalov [40] et A. A. Samarsky [41].

3.6 Méthode de désintégration et schémas majorants

Dans les schémas homogènes à calcul courant des systèmes hyperboliques basés sur l'approximation majorante des équations aux invariants, on est conduit à des schémas à coefficients positifs (schémas majorants). Friedrichs [42] a introduit la notion de schéma positif (schéma avec des matrices positives). Le schéma :

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x_1, \dots, x_m) &= \sum_{\alpha} C_{\alpha_1 \dots \alpha_m} u^n(x_1 + \alpha_1 h_1, \dots, x_m + \alpha_m h_m) \\ &= \sum_{\alpha} C_{\alpha_1 \dots \alpha_m} T_1^{\alpha_1} \dots T_m^{\alpha_m} u^n(x_1 \dots x_m) \end{aligned} \quad |3.51|$$

$$\alpha_i = -q_i, \dots, +q_i; \quad i = 1, \dots, m$$

est dit *positif* si toutes les matrices $C_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ sont positives¹.

1. Une matrice carrée symétrique est dite positive si toutes ses valeurs propres sont positives.

En application aux systèmes hyperboliques polydimensionnels, la méthode de désintégration permet d'obtenir des approximations majorantes.

Soit
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^m A_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + Bu = 0 \quad |3.52|$$

un système hyperbolique linéaire et symétrique d'après Friedrichs. Ici $u = \{u_1, \dots, u_p\}$ est un vecteur-fonction, A_{α} et B des matrices symétriques $p \times p$.

L'ouvrage de l'auteur [28] indique la possibilité de construction de schémas majorants par les méthodes de désintégration.

Suivant l'ouvrage de N. N. Anoutchine [43] montrons qu'il est possible de construire des approximations majorantes de type (3.51) pour l'équation (3.52).

Si les A_{α} sont des matrices positives, alors, appliquant l'approximation :

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^m A_{\alpha} \frac{E - T_{-\alpha}}{h_{\alpha}} u^n(x) + Bu^n(x) = 0 \quad |3.53|$$

nous arrivons au schéma :

$$u^{n+1}(x) = C_0 u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^m C_{-\alpha} T_{-\alpha} u^n(x) \quad |3.54|$$

où

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= C_{0, \dots, 0} = E - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\tau}{h_{\alpha}} A_{\alpha} - \tau B \\ C_{-1} &= C_{-1, 0, \dots, 0} = \frac{\tau}{h_1} A_1 \\ C_{-2} &= C_{0, -1, 0, \dots, 0} = \frac{\tau}{h_2} A_2 \\ \dots \\ C_{-m} &= C_{0, \dots, 0, -1} = \frac{\tau}{h_m} A_m \end{aligned} \right\} |3.55|$$

Pour un $\frac{\tau}{h}$ suffisamment petit, C_0 sera positive et les $C_{-\alpha}$ sont identiquement positives.

Si A_{α} est une matrice négative, alors dans le schéma (3.53) il faut remplacer $E - T_{-\alpha}$ par $T_{\alpha} - E$.

En définitive nous obtenons le schéma :

$$u^{n+1}(x) = C_0 u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha} T_{\alpha} u^n(x) \quad |3.56|$$

dans lequel :

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= E + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\tau}{h_\alpha} A_\alpha - \tau B \\ C_1 &= C_{1, 0, \dots, 0} = -\frac{\tau}{h_1} A_1 \\ C_2 &= C_{0, 1, 0, \dots, 0} = -\frac{\tau}{h_2} A_2 \\ &\dots\dots\dots \\ C_m &= C_{0, \dots, 0, 1} = -\frac{\tau}{h_m} A_m \end{aligned} \right\}$$

— les C_α sont identiquement positives;

— C_0 est positive pour un $\frac{\tau}{h}$ suffisamment petit.

Si les A_α sont des matrices à signe variable, on peut poser :

$$A_\alpha = \overset{1}{A}_\alpha + \overset{2}{A}_\alpha \quad |3.57|$$

où la matrice $\overset{1}{A}_\alpha$ est non négative et la matrice $\overset{2}{A}_\alpha$ est non positive. Alors le schéma :

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^m \left[\overset{1}{A}_\alpha \frac{E - T_{-a}}{h_\alpha} + \overset{2}{A}_\alpha \frac{T_a - E}{h_\alpha} \right] u^n(x) + B u^n(x) = 0 \quad |3.58|$$

se ramène à la forme :

$$u^{n+1}(x) = C_0 u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^m C_{-a} T_{-a} u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^m C_a T_a u^n(x) \quad |3.59|$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= E - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\tau}{h_\alpha} \overset{1}{A}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\tau}{h_\alpha} \overset{2}{A}_\alpha - \tau B \\ \left(\begin{array}{l} C_{-a} = \frac{\tau}{h_\alpha} \overset{1}{A}_\alpha \\ C_a = -\frac{\tau}{h_\alpha} \overset{2}{A}_\alpha \end{array} \right) & \alpha = 1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad |3.60|$$

Les matrices C_{-a} et C_a sont toujours positives; la matrice C_0 est positive pour un $\frac{\tau}{h}$ suffisamment petit.

La méthode de désintégration permet de construire des schémas positifs facilement réalisables. Examinons le schéma majorant explicite de désintégration :

$$\frac{u^{n+\frac{s}{m}} - u^{n+\frac{s-1}{m}}}{\tau} + \left[\frac{1}{A_s} \frac{E - T_{-s}}{h_s} + \frac{2}{A_s} \frac{T_s - E}{h_s} + \frac{B}{m} \right] u^{n+\frac{s-1}{m}} = 0,$$

$$s = 1, \dots, m \quad |3.61|$$

Le schéma (3.61) peut se mettre sous la forme :

$$u^{n+\frac{s}{m}} = C_s u^{n+\frac{s-1}{m}} \quad |3.62|$$

avec

$$C_s = C_{0s} + C_{-s} T_{-s} + C_s T_s \quad |3.63|$$

$$C_{-s} = \frac{\tau}{h_s} A_s^1, \quad C_s = -\frac{\tau}{h_s} A_s^2, \quad \alpha, s = 1, \dots, m$$

$$C_{0s} = E - \frac{\tau}{h_s} A_s^1 + \frac{\tau}{h_s} A_s^2 - \frac{\tau B}{m}$$

Les opérateurs C_{-s} , C_s sont toujours positifs, l'opérateur C_{0s} est positif pour un $\frac{\tau}{h}$ suffisamment petit. Par conséquent, le schéma (3.64) :

$$u^{n+1} = C_m C_{m-1} \dots C_1 u_n \quad |3.64|$$

est positif.

Les schémas majorants jouent un rôle spécial dans les méthodes aux différences.

RÈGLE

Jouissant d'une faible précision, ils sont en même temps stables de façon maximale, ils garantissent souvent la stabilité dans l'espace C et sont simples à réaliser.

4. Application de la méthode à pas fractionnaires aux problèmes aux limites des équations de Laplace et de Poisson

4.1 Lien entre les problèmes stationnaires et d'évolution

Examinons dans le domaine rectangulaire G le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 & |4.1| \\ u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \text{ pour } (x_1, x_2) \in \gamma & |4.2| \end{cases}$$

où γ est la frontière de G , $G = \{0 < x_i < \Pi, i = 1, 2\}$

Parallèlement au problème (4.1), examinons le problème d'évolution :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) & |4.3| \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) & |4.4| \end{cases}$$

avec les mêmes conditions aux limites stationnaires (4.2).

Appelons $u(x_1, x_2)$ la solution du problème (4.1), (4.2) et $u(x_1, x_2, t)$ la solution du problème (4.3), (4.4), (4.2).

Leur différence :

$$v(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2) \quad |4.5|$$

vérifie l'équation (4.3) avec les conditions initiales :

$$v(x_1, x_2, 0) = v_0(x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) - u(x_1, x_2) \quad |4.6|$$

et des conditions aux limites nulles :

$$v(x_1, x_2, t) = 0 \text{ sur } \gamma \quad |4.7|$$

$v(x_1, x_2, t)$ se présente sous la forme :

$$v(x_1, x_2, t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1 k_2}(t) \sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2 \quad |4.8|$$

$$\text{où } A_{k_1 k_2}(t) = a_{k_1 k_2} \exp[-a^2(k_1^2 + k_2^2)t] \quad |4.9|$$

sont les coefficients de Fourier de la fonction $v(x_1, x_2, t)$, $a_{k_1 k_2}$ les coefficients de Fourier de la fonction $v_0(x_1, x_2)$.

On peut écrire les formules (4.8), (4.9) sous la forme :

$$v(x_1, x_2, t) = S(t) v(x_1, x_2, 0) \quad |4.10|$$

L'opérateur $S(t)$ dans l'espace $L_2(G)$ a la norme :

$$\|S(t)\| = \exp(-2a^2 t) \quad |4.11|$$

L'opérateur de passage $S(\tau)$ a la norme :

$$\|S(\tau)\| = \exp(-2a^2 \tau) \quad |4.12|$$

$$\text{Donc : } \lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)\| = 0 \quad |4.13|$$

Ce qui entraîne que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(x_1, x_2, t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2)\| = 0 \quad |4.14|$$

c'est-à-dire que la solution du problème d'évolution converge vers la solution stationnaire avec les mêmes conditions aux limites, indépendamment du choix des conditions initiales.

Il est clair qu'il existe un ensemble d'équations d'évolution dont les solutions convergent vers la solution du problème stationnaire. A la place de l'équation (4.3) nous pouvons, par exemple, étudier l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \quad |4.15|$$

Les équations d'évolution acquièrent le caractère d'équations à oscillations amorties. On peut montrer que, dans le cas de (4.15) avec des données initiales quelconques $u(x_1, x_2, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0)$, la solution de (4.15) converge vers $u(x_1, x_2)$.

Dans les exemples étudiés ci-dessus, les équations d'évolution (4.3) et (4.15) ont décrit exactement un processus physique : diffusion de la chaleur, propagation des oscillations amorties. Seulement, dans certains cas, les équations d'évolution correspondantes peuvent n'avoir qu'un sens formel, garantissant les conditions mathématiques d'amortissement (4.13) mais ne décrivant aucun processus physique. Ceci est vrai par exemple pour l'équation de l'équilibre élastique :

$$\Delta \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0 \quad |4.16|$$

L'équation d'évolution :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right] = 0 \quad |4.17|$$

a un opérateur $S(t)$ satisfaisant les conditions d'amortissement (4.13) et pourtant il est difficile de trouver un modèle physique décrit par l'équation (4.17). Ceci ne nous empêchera pas de construire des schémas itératifs utilisant l'équation (4.17).

4.2 Schémas d'intégration des problèmes d'évolution et schémas itératifs

La correspondance que nous venons de démontrer entre les équations stationnaires et d'évolution induit de façon totale la même correspondance entre les schémas aux différences. Considérons à titre d'exemple le schéma aux différences à deux niveaux pour l'équation (4.3.) :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau_n} = \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n, \quad \tau_n = a^2 (t_{n+1} - t_n) \quad |4.18|$$

où Ω_1, Ω_2 sont certains opérateurs aux différences spatiaux dépendant de τ_n, h_1, h_2 . Soit u^n la solution de (4.18) satisfaisant une certaine condition initiale :

$$u^0 = u(0) \quad |4.19|$$

et des conditions aux limites stationnaires :

$$u^n = f, \quad (x_1, x_2) \in \gamma \quad |4.20|$$

soit w la solution du problème aux différences aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda w = 0, \quad (x_1, x_2) \in G; \quad w = f, \quad (x_1, x_2) \in \gamma; \\ \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad \Lambda_i = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad |4.21|$$

où f est la fonction de (4.20).

La différence $v^n = u^n - w$ satisfait l'équation :

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_n} = \Omega_1 v^{n+1} + \Omega_2 v^n + (\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda) w$$

Rappelons que Ω_1 et Ω_2 dépendent de τ_n, h_1, h_2 alors que $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ dépendent de h_1 et h_2 seulement.

Introduisons les quantités :

$$R_n = (\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda)_{n-1} w \quad \text{et} \quad R = \max || R_n || \quad |4.22|$$

où le max de $|| R_n ||$ est pris sur tous les τ_n , bornés par un certain τ_{\max} .

En vertu de la relation (1.24) nous avons :

$$v^n = C_{n,0} v_0 + \tau \sum_{a=1}^n C_{n,a} r_a \quad |4.23|$$

$$\text{avec } \left. \begin{aligned} C_{n,a} &= C_n C_{n-1} \dots C_{a+1}, \quad C_n = (E - \tau_n \Omega_1)^{-1} (E + \tau_n \Omega_2) \\ r_a &= \tau_{a-1} (E - \tau_{a-1} \Omega_1)^{-1} R_a \end{aligned} \right\} \quad |4.24|$$

Si le schéma, avec la loi de passage à la limite donnée, est fortement stable (cf. ch. 1.2), c'est-à-dire si :

$$\|C_n\| \leq 1 - k\tau_n \quad |4.25|$$

où la constante k ne dépend pas de τ_n , alors on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|v^n\| &\leq (1 - k\tau_{\min})^n \|v_0\| + \tau_{\max} R \sum_{a=1}^n (1 - k\tau_{\min})^{n-a} \\ &= (1 - k\tau_{\min})^n \|v_0\| + \frac{R}{k} \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} [1 - (1 - k\tau_{\min})^n] \end{aligned} \quad |4.26|$$

où τ_{\max} et τ_{\min} sont les bornes de τ_n :

$$\tau_{\min} \leq \tau_n \leq \tau_{\max}$$

Pour τ_{\min} et τ_{\max} fixés et $n \rightarrow \infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = \frac{R}{k} \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} \quad |4.27|$$

Comme pour le schéma on a la relation d'approximation $\Omega_1 + \Omega_2 \sim \Lambda$, on a pour $\tau_{\max} \rightarrow 0$, $h(\tau_{\max}) \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$, et à partir de (4.27) :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau_{\max} \rightarrow 0}} \|v^n\| = 0 \text{ si pour } \left\{ \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ \tau_{\max} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ on a } \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = 0 \quad (1)$$

Par conséquent, avec les conditions d'approximation $\Omega_1 + \Omega_2 \sim \Lambda$ et la forte stabilité du schéma (4.18), la solution u^n du problème (4.3) converge vers la solution w du problème (4.21) si $n \rightarrow \infty$, $\tau_{\max} \rightarrow 0$, $h(\tau_{\max}) \rightarrow 0$, $\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = 0 \quad (1)$ et u_0 arbitraire.

On en déduit que n'importe quel schéma (4.18) fortement stable intégrant l'équation (4.3) peut être considéré comme étant en même temps un schéma itératif de résolution du problème aux limites (4.21). Dans ce cas, le pas d'intégration τ_n peut être considéré comme un paramètre itératif ou *paramètre de relaxation*.

Il a déjà été montré que la convergence $u^n \rightarrow w$ nécessite, pour parler de façon imagée, la *pulvérisation* de τ et h .

Si l'on exige des conditions d'approximation plus forte :

$$(\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda) w \rightarrow 0 \quad |4.28|$$

avec $\tau \rightarrow 0$, h fixé, alors la convergence $u^n \rightarrow w$ peut avoir lieu pour un h fixé mais, de façon générale, pour un τ très petit.

Avec des conditions d'approximation encore plus fortes, la convergence $u^n \rightarrow w$ a lieu pour τ et h quelconques.

Supposons que quel que soit τ on ait l'égalité :

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Lambda \quad |4.29|$$

Nous appellerons la condition (4.29) condition de consistance totale.

Si la condition de consistance totale (4.29) est remplie, la convergence $u^n \rightarrow w$ a lieu si et seulement si :

$$\|C_{n,0}\| \rightarrow 0 \quad |4.30|$$

La condition (4.30) est la condition de stabilité asymptotique qui, on le sait, découle de la stabilité forte (cf. ch. 1.3).

On peut donner à la condition (4.29) de consistance totale une forme plus générale. Étudions le schéma itératif à deux échelons suivants :

$$B \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) = \Lambda u^n \quad |4.31|$$

où B est un certain opérateur linéaire. La forme (4.31) est la forme canonique des schémas itératifs à deux échelons; on l'appelle **algorithme universel** (cf. [87]).

Soit w une solution du problème stationnaire (4.21). Alors $v^n = w - u^n$ satisfait (4.31) :

$$B \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} \right) = \Lambda v^n$$

L'opérateur de passage C pour le schéma (4.31) a la forme :

$$C = E + \tau B^{-1} \Lambda \quad |4.32|$$

Si l'opérateur C de (4.32) satisfait la condition de forte stabilité, alors, comme précédemment, nous aurons la convergence $v^n \rightarrow 0$, $u^n \rightarrow w$ pour τ et h quelconques appartenant au domaine de forte stabilité. Par conséquent, nous pouvons considérer la possibilité de mettre un schéma itératif sous la forme (4.31) comme une condition de consistance totale.

Dans le cas où l'opérateur B est un polynôme par rapport à τ et à un ensemble de certains opérateurs finis spatiaux, de (4.31) on arrive facilement à l'équation (4.18) avec la condition de consistance totale (4.29).

Dans le cas d'une structure plus complexe de B , un tel passage est impossible. Dans la suite nous considérerons la possibilité de mettre un schéma sous la forme (4.31) comme une définition de la consistance totale.

Pour les schémas à deux échelons ne remplissant pas la condition de consistance totale, on a la forme plus générale :

$$B \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) = \Omega u^n \quad |4.33|$$

où Ω approche l'opérateur Λ pour une quelconque loi de passage à la limite $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$.

Déterminons la *vitesse de convergence* d'un schéma itératif à consistance totale et forte stabilité avec les paramètres fixés τ, h_1, h_2 .

Fixant h_1 et h_2 , choisissons τ de manière optimale, c'est-à-dire de manière à ce que la norme de l'opérateur de passage C soit minimale.

$$\text{Soit :} \quad \min_{\tau} \| C(\tau, h_1, h_2) \| = 1 - \varepsilon(h_1, h_2) \quad |4.34|$$

On peut donner une estimation asymptotique de la vitesse de convergence, en considérant h_1 et h_2 comme des infiniment petits et en développant $\varepsilon(h_1, h_2)$ en série par rapport à h_1 et h_2 .

Posons pour simplifier $h = h_1 = h_2$ et supposons que l'on ait l'estimation asymptotique suivante :

$$\min_{\tau} \| C(\tau, h_1, h_2) \| = 1 - Rh^{\alpha}, \quad R > 0, \quad \alpha > 0 \quad |4.35|$$

Il est facile de voir que pour que la norme de l'écart v^n diminue de $q = \frac{1}{\varepsilon}$ il faut m itérations avec :

$$m \sim \frac{|\text{Log } \varepsilon|}{Rh^{\alpha}} \sim \frac{\text{Log } q}{R} N^{\alpha}, \quad N \sim \frac{1}{h} \quad |4.36|$$

Il est particulièrement aisé de déterminer la stabilité et la vitesse de convergence des schémas à consistance totale dans le cas où l'opérateur C a pour fonctions propres les fonctions (harmoniques) $\sin k_1 x_1 \times \sin k_2 x_2$. Dans ce cas, on a :

$$\left. \begin{aligned} v^n &= \sum_{k_1, k_2=1}^{N_1, N_2} a^n(\tau, h_1, h_2, k_1, k_2) \sin k_1 x_1 \times \sin k_2 x_2 \\ a^n &= \varrho(\tau_n, h_1, h_2, k_1, k_2) a_{n-1} = \varrho_n a_0 \\ \varrho^n &= \prod_{i=1}^n \varrho(\tau_i, h_1, h_2, k_1, k_2) \\ \| C_n \| &= \max_{k_1, k_2} | \varrho(\tau_n, h_1, h_2, k_1, k_2) | \end{aligned} \right\} |4.37|$$

où C_n est l'opérateur de passage de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ à la $n^{\text{ième}}$ itération. Par conséquent la norme de l'opérateur du schéma itératif est définie comme étant le maximum du module du coefficient ϱ de croissance des harmoniques $\sin k_1 x_1 \times \sin k_2 x_2$.

Pour les opérateurs dont les fonctions propres ne sont pas harmoniques, l'analyse harmonique de la stabilité n'a qu'un caractère suggestif.

4.3 Schémas itératifs pour les équations de Laplace à deux dimensions

Donnons une analyse comparée des schémas pour les équations de Laplace. Introduisons une série de notations :

① $\varrho = \varrho(\tau, h_1, h_2, k_1, k_2)$

ϱ est le coefficient de croissance des harmoniques $\sin k_1 x_1 \times \sin k_2 x_2$ après une itération de pas τ .

$$\textcircled{2} \quad \left[\begin{array}{l} \varrho_0 = \| C(\tau, h_1, h_2) \| = \max_{k_1, k_2} |\varrho| \\ \varrho_1 = \min_{\tau} \| C(\tau, h_1, h_2) \| = \min_{\tau} \varrho_0 \\ \varrho_n = \prod_{i=1}^n \varrho(\tau_i, h_1, h_2, k_1, k_2) \end{array} \right] \quad |4.38|$$

$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_n$ sont les coefficients de croissance des harmoniques $\sin k_1 x_1 \times \sin k_2 x_2$ après les itérations faites avec les pas $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$.

$$a_i = \frac{4a^2\tau}{h_i^2} \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}, \quad r_i = \frac{a^2\tau}{h_i^2}, \quad i = 1, 2$$

$\textcircled{3}$ m est le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée ε ; $k_i = 1, \dots, N_i$; $(N_i + 1) h_i = \pi$; $i = 1, 2$.

Dans la suite, nous ferons toujours des estimations asymptotiques, par conséquent on posera :

$$\sin \frac{h_i}{2} \approx \frac{h_i}{2}; \quad \cos \frac{h_i}{2} \approx 1 - \frac{h_i^2}{8}$$

De plus on posera, pour simplifier : $h = h_1 = h_2, a^2 = 1$.

4.3.1 Schéma explicite

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_i = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} \quad |4.39|$$

$$\varrho = 1 - (a_1 + a_2)$$

$$\varrho_0 = \max \left\{ \left| 1 - 2\tau \right|, \left| 1 - 8r \left(1 - \frac{h^2}{4} \right) \right| \right\} \quad |4.40|$$

La consistance totale a toujours lieu, la stabilité forte a lieu pour $r \leq \frac{1}{4}$.

On en déduit :

$$\varrho_1 = 1 - \frac{1}{2} h^2 \quad |4.41|$$

$$m \approx 2 |\text{Log } \varepsilon| N^2 \quad |4.42|$$

4.3.2 Schéma de relaxation le long d'une ligne

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n \quad |4.43|$$

Le schéma (4.43) satisfait la condition de consistance totale :

$$\varrho = \frac{1 - a_2}{1 + a_1} \quad |4.44|$$

D'où la forte stabilité du schéma (4.43) pour $r \leq \frac{1}{2}$

$$\rho_0 = \max \left\{ \left| \frac{1-\tau}{1+\tau} \right|, \left| \frac{1-4r+\tau}{1+\tau} \right| \right\} \quad |4.45|$$

$$\rho = 1 - h^2 \quad |4.46|$$

$$m \approx |\text{Log } \varepsilon| N^2 \quad |4.47|$$

Par conséquent le schéma (4.43) converge deux fois plus vite que le schéma explicite. Le schéma suivant est tout à fait analogue :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^n + \Lambda_2 u^{n+1}$$

4.3.3 Schéma de relaxation supérieure ¹

$$(E - \alpha\tau\Omega_1) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad |4.48|$$

$$\Omega_1 = \frac{T_{-1} + T_{-2} - 4E}{h^2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

Le schéma de relaxation supérieure vérifie la condition de consistance totale.

$$\rho = \frac{1 + 2ar + (2\alpha - 4)r \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} \right) + ar (\sin k_1 h + \sin k_2 h) i}{1 + 2ar + 2ar \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} \right) + ar (\sin k_1 h + \sin k_2 h) i} \quad |4.49|$$

Avec la condition $\alpha > 1$ le schéma (4.48) est fortement stable.

L'expression de ρ est complexe parce que les fonctions $\sin k_1 x_1$, $\sin k_2 x_2$ ne sont pas des fonctions propres de l'opérateur Ω_1 et l'analyse harmonique de la stabilité cesse d'être rigoureuse.

On peut montrer que, pour un choix convenable de τ et α , on a :

$$\rho = 1 - C^{\text{te}} h \quad (\text{cf. [53], [27]})$$

Par conséquent, le schéma de relaxation supérieure a une convergence plus rapide que le schéma précédent.

Le schéma de relaxation supérieure se réalise par une récurrence sur la diagonale principale.

4.3.4 Schéma des directions alternées

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n \right) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{n+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad |4.50|$$

1. LIEBMAN, FRANKEL [44], YOUNG, [45].

Le schéma équivalent à pas entiers a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n \\ \Omega_1 &= \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 \\ \Omega_2 &= \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} + \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad |4.51|$$

De (4.51) découle la consistance totale.

$$\varrho = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} a_1\right) \left(1 - \frac{1}{2} a_2\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} a_1\right) \left(1 + \frac{1}{2} a_2\right)} \quad |4.52|$$

Le schéma des directions alternées est fortement stable quel que soit τ .

$$\varrho_0 = \max \left\{ \left[\frac{1 - \frac{1}{2} \tau}{1 + \frac{1}{2} \tau} \right]^2, \left[\frac{1 - 2r \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)}{1 + 2r \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)} \right]^2 \right\} \quad |4.53|$$

$$\varrho_1 = 1 - 2h \quad |4.54|$$

$$m \approx \frac{1}{2} |\text{Log } \varepsilon| N \quad |4.55|$$

Le schéma des directions alternées, comme le schéma de relaxation supérieure, augmente la vitesse de convergence d'un ordre par rapport au schéma (4.2). Ceci est lié au fait que le schéma des directions alternées est fortement stable quel que soit τ alors que le schéma (4.2) est stable pour un τ suffisamment petit (d'ordre h^2).

4.3.5 Schéma à corrections stabilisatrices

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right\} \quad |4.56|$$

Le schéma équivalent à pas entiers a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n \\ \Omega_1 &= \Lambda_1 + \Lambda_2 - \tau \Lambda_1 \Lambda_2, \quad \Omega_2 = \tau \Lambda_1 \Lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad |4.57|$$

$$\varrho = \frac{1 + a_1 a_2}{1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2} = \frac{1 + a_1 a_2}{(1 + a_1)(1 + a_2)} \quad |4.58|$$

$$\varrho_0 = \max \left\{ \frac{1 + \tau^2}{1 + 2\tau + \tau^2}, \frac{1 + 16r^2 \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)}{1 + 8r \left(1 - \frac{h^2}{4}\right) + 16r^2 \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)} \right\} \quad |4.59|$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{1 + h} \approx 1 - h \quad |4.60|$$

$$m \approx |\text{Log } \varepsilon| N \quad |4.61|$$

4.3.6 Schéma de désintégration

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n \right) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad |4.62|$$

Le schéma équivalent à pas entiers a la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n \quad |4.63|$$

$$\Omega_1 = \alpha (\Lambda_1 + \Lambda_2) - \alpha^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2, \quad \Omega_2 = \beta (\Lambda_1 + \Lambda_2) + \beta^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2$$

Le schéma (4.62) satisfait la condition de consistance totale; pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Avec ces conditions il devient équivalent au schéma des directions alternées.

NOTE DU TRADUCTEUR

Nous avons programmé en Fortran simple précision le schéma (4.62) avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$; le

domaine est $[1,2] \times [1,2]$; nous avons pris $\sigma = 1$.

La solution exacte est $u = \text{Log}(x^2 + y^2)$ ($\Delta u = 0$).

Le test d'arrêt du schéma itératif est :

$$| \text{valeur moyenne de } u^n - \text{valeur moyenne de } u^{n+1} | \leq 10^{-7}$$

Nous avons pris $u_0 = 0$. Les temps machine sont toujours sur IBM 7044 mais sont donnés cette fois compilation non comprise. Nous avons alors les deux tableaux :

$NT = 100$				
N	Nombre d'itérations	Erreur absolue moyenne	Temps	
10	66	$0,613 \cdot 10^{-3}$	17 secondes 27 tierces	
20	61	$0,554 \cdot 10^{-3}$	50 secondes 30 tierces	
30	60	$0,534 \cdot 10^{-3}$	1 minute 42 secondes 9 tierces	
40	59	$0,525 \cdot 10^{-3}$	2 minutes 49 secondes 42 tierces	
50	58	$0,519 \cdot 10^{-3}$	4 minutes 18 secondes 47 tierces	

$N = 20$				
NT	Nombre d'itérations	Erreur absolue moyenne	Temps	
50	32	$0,109 \cdot 10^{-2}$	0 minute 26 secondes 1 tierce	
100	61	$0,554 \cdot 10^{-3}$	0 minute 50 secondes 30 tierces	
150	87	$0,37 \cdot 10^{-3}$	1 minute 12 secondes 47 tierces	
200	114	$0,28 \cdot 10^{-3}$	1 minute 35 secondes 26 tierces	
250	143	$0,22 \cdot 10^{-3}$	1 minute 59 secondes 37 tierces	
300	172	$0,18 \cdot 10^{-3}$	2 minutes 23 secondes 54 tierces	
350	201	$0,16 \cdot 10^{-3}$	2 minutes 48 secondes 10 tierces	

4.3.7 Schéma prédicteur-correcteur (schéma à corrections d'approximation)

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{4}} - u^n}{\tau/2} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{4}}, & \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{4}}}{\tau/2} &= \Lambda_2 u^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= (\Lambda_1 + \Lambda_2) u^{n+\frac{1}{2}} = \Lambda u^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad |4.64|$$

Des deux premières équations on tire :

$$A u^{n+\frac{1}{2}} = (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1) (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2) u^{n+\frac{1}{2}} = E u^n \quad |4.65|$$

Éliminant $u^{n+\frac{1}{2}}$ entre la troisième équation de (4.64) et (4.65), on trouve :

$$A (u^{n+1} - u^n) = \tau \Lambda u^n \quad |4.66|$$

On voit facilement que le schéma à corrections d'approximation est équivalent au schéma des directions alternées.

4.3.8 Schémas avec des opérateurs singuliers

V. K. Saouliev [27] et N. I. Bouleïev [20] ont utilisé des schémas d'intégration et des schémas itératifs qui peuvent être considérés comme étant une autre façon de concevoir les schémas à pas fractionnaires. Nous nous limiterons à l'exposé de quelques schémas de [27].

Dans l'application à l'équation de la chaleur, ces schémas, au lieu de l'approximation habituelle :

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad \Lambda_i = \frac{\Lambda_i \Lambda_{-i}}{h_i^2} = \frac{T_i - E}{h_i^2} - \frac{E - T_i^{-1}}{h_i^2}$$

utilisent l'approximation suivante :

$$\Lambda = \Omega_1 + \Omega_2; \quad \Omega_1 = \frac{T_1^{-1} - E}{h_1^2} + \frac{T_2^{-1} - E}{h_2^2}; \quad \Omega_2 = \frac{T_1 - E}{h_1^2} + \frac{T_2 - E}{h_2^2} \quad |4.67|$$

Alors, comme pour n'importe quelle fonction f suffisamment régulière, nous avons :

$$\|\Omega_i f\| = O\left(\frac{1}{h}\right), \quad \|\Omega_1 \Omega_2 f\| = O\left(\frac{1}{h_1 h_2}\right), \quad i = 1, 2 \quad |4.68|$$

les opérateurs Ω_1 , Ω_2 , $\Omega_1 \cdot \Omega_2$ sont singuliers (cf. ch. 1, 2). Le schéma d'intégration de l'équation (4.3) basé sur la représentation (4.67) a, en pas fractionnaires, la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n \right) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Omega_2 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \right\}, \quad \left(\begin{array}{l} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{array} \right), \quad \alpha + \beta = 1 \quad |4.69|$$

ou encore :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \alpha \Omega_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \beta \Omega_2 u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \beta \Omega_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \alpha \Omega_2 u^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad |4.70|$$

L'équation (4.69) a la structure de schéma de désintégration, l'équation (4.70) a la structure du schéma à directions alternées. Les schémas (4.69), (4.70) sont équivalents parce qu'ils ont la même représentation en pas entiers :

$$(E - \alpha \tau \Omega_1) (E - \alpha \tau \Omega_2) u^{n+1} = (E + \beta \tau \Omega_1) (E + \beta \tau \Omega_2) u^n \quad |4.71|$$

Après avoir mis le schéma (4.71) sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \alpha(\Omega_1 + \Omega_2)u^{n+1} + \beta(\Omega_1 + \Omega_2)u^n + \tau\Omega_1\Omega_2(\beta^2 u^n - \alpha^2 u^{n+1}) \\ &= \Lambda(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) + \tau\Omega_1\Omega_2(\beta^2 u^n - \alpha^2 u^{n+1}) \end{aligned} \right\} |4.72|$$

il est facile d'estimer l'ordre d'approximation du schéma (4.71).

De l'égalité (4.68), on déduit que, pour $\alpha \neq \beta$ et pour la loi de passage à la limite $\frac{\tau}{h^2} = \text{constante}$, le schéma (4.72) n'est pas consistant à l'équation (4.3); pour

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ la consistance a lieu, mais elle est du premier ordre et non du second.

Traitant le schéma (4.72) comme un schéma itératif, nous voyons qu'il satisfait la condition de consistance totale pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

De l'expression de ρ :

$$\rho = \frac{1 - \beta(a_1 + a_2) + 4r^2\beta^2 \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} + 2 \sin \frac{k_1 h}{2} \sin \frac{k_2 h}{2} \cos \frac{k_2 - k_1}{2} h \right)}{1 + \alpha(a_1 + a_2) + 4r^2\alpha^2 \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} + 2 \sin \frac{k_1 h}{2} \sin \frac{k_2 h}{2} \cos \frac{k_2 - k_1}{2} h \right)} \quad |4.73|$$

découle la forte stabilité pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

La réalisation des schémas (4.68) (4.69) est très simple : au premier pas fractionnaire on applique la récurrence sur la diagonale de bas en haut et de gauche à droite, au second pas fractionnaire sur la diagonale dans l'autre direction.

Si l'on considère le schéma (4.70) comme un schéma itératif pour un système d'équations algébriques, il se trouve être un cas particulier des schémas de A. A. Samarsky [50]. (cf. ch. 7.2).

4.3.9 Schémas à paramètres complémentaires

On voit facilement que l'on peut introduire dans le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas et Rachford des paramètres complémentaires. Ceci a été fait par Douglas dans [26].

Le schéma à corrections stabilisatrices avec des paramètres arbitraires a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \alpha \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + (\Lambda - \alpha \Lambda_1) u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \alpha \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right\} |4.74|$$

Après élimination de $u^{n+\frac{1}{2}}$, on trouve :

$$(E - \alpha \Lambda_1)(E - \alpha \tau \Lambda_2) u^{n+1} = [E + \tau(1 - \alpha)\Lambda + \alpha^2 \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2] u^n \quad |4.75|$$

Nous obtenons l'expression de ρ :

$$\rho = \frac{1 - (1 - \alpha)(a_1 + a_2) + \alpha^2 a_1 a_2}{1 + \alpha(a_1 + a_2) + \alpha^2 a_1} \quad |4.76|$$

Le schéma (4.74) possède la consistance totale et la stabilité forte pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Pour $\alpha = 1$ le schéma (4.74) est le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas-Rachford, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ c'est le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas, équivalent au schéma des directions alternées.

V. P. Ilyne [48] a proposé une autre famille de schémas à un paramètre incluant le schéma des directions alternées et le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas-Rachford :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n \right) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= k \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} + \frac{1}{2} \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right] \quad |4.77|$$

Le schéma à pas entiers a la forme :

$$\left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_1 \right) \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_2 \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1+k}{2} \Lambda u^n \quad |4.78|$$

Le schéma (4.78) satisfait la condition de consistance totale.

De l'expression :

$$\rho = \frac{1 - \frac{k}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{4} a_1 a_2}{1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{4} a_1 a_2} \quad |4.79|$$

découle la forte stabilité du schéma (4.77) pour $-1 < k \leq 1$.

Pour $k = 0$ le schéma (4.77) est le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas-Rachford, pour $k = 1$, c'est le schéma des directions alternées.

Le travail de V.A. Enalsky [49] étudie une famille de schémas à un paramètre contenant pour des valeurs particulières des paramètres le schéma de désintégration et le schéma des directions alternées. Cette famille a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \alpha \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \beta \Lambda_1 u^n + \gamma \Lambda_2 u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \alpha \Lambda_2 u^{n+1} + \gamma \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \beta \Lambda_2 u^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right] \quad |4.80|$$

où α, β, γ sont des paramètres indéterminés pour l'instant.

Après l'élimination de $u^{n+\frac{1}{2}}$ nous arrivons au schéma :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n \\ \Omega_1 &= \alpha \Lambda - \alpha^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2 \\ \Omega_2 &= (\beta + \gamma) \Lambda + \tau [\beta \gamma \Lambda^2 + (\beta - \gamma)^2 \Lambda_1 \Lambda_2] \end{aligned} \right\} \quad |4.81|$$

Avec les conditions : $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $(\beta - \gamma)^2 - \alpha^2 = 0$ |4.82|
l'équation (4.81) prend la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + \alpha \Lambda (u^{n+1} - u^n) + \beta \gamma \tau \Lambda^2 u^n - \alpha^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n)$$

Le schéma (4.80) prend alors la forme canonique :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^n \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{E} + \beta \gamma \tau \Lambda)^{-1} (\mathbf{E} - \alpha \tau \Lambda_1) (\mathbf{E} - \alpha \tau \Lambda_2) \end{aligned} \right\} \quad |4.83|$$

et vérifie la condition de consistance totale.

De la deuxième équation (4.82) découle l'alternative :

$$\alpha = \beta - \gamma \text{ ou } \alpha = \gamma - \beta$$

Comme les paramètres α , β , γ sont liés par les deux relations (4.82), le schéma (4.80) admet les deux paramètres arbitraires τ et α .

Posant $\gamma = 0$, nous trouvons $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que nous trouvons le schéma

de désintégration avec des poids égaux; posant $\beta = 0$, nous trouvons $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que nous obtenons le schéma des directions alternées.

On voit facilement que l'on peut mettre tous les schémas étudiés sous la forme :

$$\mathbf{B} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad |4.84|$$

où

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \alpha \tau \Lambda_1) (\mathbf{E} - \alpha \tau \Lambda_2) \quad |4.85|$$

pour les schémas des directions alternées, des corrections stabilisatrices et des corrections d'approximation;

où

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \alpha \tau \Omega_1) (\mathbf{E} - \alpha \tau \Omega_2) \quad |4.86|$$

pour le schéma à opérateurs singuliers;

où

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} + \beta \gamma \tau \Lambda)^{-1} (\mathbf{E} - \alpha \tau \Lambda_1) (\mathbf{E} - \alpha \tau \Lambda_2) \quad |4.87|$$

pour le schéma de V. A. Enalsky.

La forme canonique sous la forme (4.85) est donnée dans les ouvrages de E. G. Diakonov [95], [90] et de A. A. Samarsky [91].

4.4 Schémas pour l'équation tridimensionnelle de Laplace

Donnons un tour d'horizon rapide des schémas itératifs pour l'équation tridimensionnelle de Laplace. Remarquons que, dans le passage de l'équation bidimensionnelle à tridimensionnelle, beaucoup de propriétés et de classifications changent de forme.

4.4.1 Schéma des directions alternées

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{3} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n \right) \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{3} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 u^{n+\frac{1}{3}} \right) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \frac{1}{3} \left(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 u^{n+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad |4.88|$$

Ce schéma, comme nous l'avons déjà montré (*cf.* ch. 2.1), est fortement stable seulement pour un τ suffisamment petit.

Comme précédemment, il vérifie la condition de consistance totale mais au sens de (4.31) et non au sens de (4.29). En effet, après élimination des pas fractionnaires $u^{n+\frac{1}{3}}$ et $u^{n+\frac{2}{3}}$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^n \\ B &= \left[E + \frac{1}{9} \tau \Lambda + \frac{1}{27} \tau^2 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \right]^{-1} \left(E - \frac{1}{3} \tau \Lambda_1 \right) \left(E - \frac{1}{3} \tau \Lambda_2 \right) \left(E - \frac{1}{3} \tau \Lambda_3 \right) \quad |4.89| \end{aligned}$$

4.4.2 Schéma de désintégration

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{3}} + \beta u^n \right) \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left(\alpha u^{n+\frac{2}{3}} + \beta u^{n+\frac{1}{3}} \right) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \Lambda_3 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{2}{3}} \right) \end{aligned} \right\} \quad |4.90|$$

En pas entiers, ce schéma prend la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) (\alpha u^{n+1} + \beta u^n) - \tau (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \\ \times (\alpha^2 u^{n+1} - \beta^2 u^n) + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (\alpha^3 u^{n+1} + \beta^3 u^n) \quad |4.91|$$

Par conséquent le schéma de désintégration ne satisfait la condition de consistance totale pour aucun α . De l'expression de ρ :

$$\rho = \frac{1 - \beta (a_1 + a_2 + a_3) + \beta^2 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) - \beta^3 a_1 a_2 a_3}{1 + \alpha (a_1 + a_2 + a_3) + \alpha^2 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \alpha^3 a_1 a_2 a_3} \quad |4.92|$$

découle la forte stabilité pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Donc, alors que le schéma des directions alternées conserve la consistance totale et perd la propriété de stabilité absolument forte, le schéma de désintégration, lui, conservant la propriété de stabilité absolument forte, perd la propriété de consistance totale. Ces schémas cessent d'être équivalents.

4.4.3 Schéma à corrections d'approximation de Brian¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{6}} - u^n}{\tau/2} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{6}} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{6}} - u^{n+\frac{1}{6}}}{\tau/2} &= \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{6}} - u^n) \\ \frac{u^{n+\frac{3}{6}} - u^{n+\frac{2}{6}}}{\tau/2} &= \Lambda_3 (u^{n+\frac{3}{6}} - u^n) \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{6}} + \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{6}} + \Lambda_3 u^{n+\frac{3}{6}} \end{aligned} \right\} \quad |4.93|$$

Après élimination des pas fractionnaires, le schéma a la forme :

$$\left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_1 \right) \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_2 \right) \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_3 \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad |4.94|$$

Le schéma possède la consistance totale. L'absolue stabilité est due à l'expression de ρ :

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3) + \frac{1}{4} (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \frac{1}{8} a_1 a_2 a_3}{1 + \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3) + \frac{1}{4} (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \frac{1}{8} a_1 a_2 a_3} \quad |4.95|$$

1. BRIAN [25], cf. ch. 2.7.

Le schéma de correction d'approximation et de désintégration (cf. ch. 2.7) a une structure plus simple :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{6}} - u^n}{\alpha \tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{6}}, & \frac{u^{n+\frac{2}{6}} - u^{n+\frac{1}{6}}}{\alpha \tau} &= \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{6}} \\ \frac{u^{n+\frac{3}{6}} - u^{n+\frac{2}{6}}}{\alpha \tau} &= \Lambda u^{n+\frac{3}{6}}, & \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^{n+\frac{3}{6}} \end{aligned} \right\} \quad |4.96|$$

Le schéma à pas entiers a la forme :

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1) (E - \alpha \tau \Lambda_2) (E - \alpha \tau \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad |4.97|$$

Le schéma possède la consistance totale et la forte stabilité pour $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ le schéma devient le schéma de Brian.

4.4.4 Schéma à corrections stabilisatrices

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \alpha \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + (1 - \alpha) \Lambda_1 u^n + (\Lambda_2 + \Lambda_3) u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \alpha \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \alpha \Lambda_3 (u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}) \end{aligned} \right\} \quad |4.98|$$

Pour $\alpha = 1$, nous avons le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas-Rachford [12], pour $\alpha = \frac{1}{2}$ nous avons le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas [26].

Le schéma à pas entiers a la forme :

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1) (E - \alpha \tau \Lambda_2) (E - \alpha \tau \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad |4.99|$$

d'où découle la consistance totale.

De l'expression de ρ :

$$\rho = \frac{1 - (1 - \alpha)(a_1 + a_2 + a_3) + \alpha^2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \alpha^3 a_1 a_2 a_3}{1 + \alpha(a_1 + a_2 + a_3) + \alpha^2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \alpha^3 a_1 a_2 a_3} \quad |4.100|$$

découle la forte stabilité du schéma pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Le schéma à corrections stabilisatrices est équivalent au schéma à corrections d'approximation et de désintégration.

4.4.5 Schéma de l'algorithme universel

On peut se baser directement sur la représentation canonique

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1) (E - \alpha \tau \Lambda_2) (E - \alpha \tau \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad |4.101|$$

des schémas à pas fractionnaires étudiés pour lui faire correspondre le schéma de l'algorithme universel (cf. [87]¹).

La formule (4.101) entraîne le fait que le schéma de l'algorithme universel est équivalent aux schémas à corrections stabilisatrices et à corrections d'approximations. Le schéma peut avoir aussi la réalisation suivante :

$$\left. \begin{aligned} (E - \alpha \tau \Lambda_1) u^{n+\frac{1}{3}} &= [(E - \alpha \tau \Lambda_1) (E - \alpha \tau \Lambda_2) (E - \alpha \tau \Lambda_3) + \tau \Lambda] u^n \\ (E - \alpha \tau \Lambda_2) u^{n+\frac{2}{3}} &= u^{n+\frac{1}{3}} \\ (E - \alpha \tau \Lambda_3) u^{n+1} &= u^{n+\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} |4.102|$$

correspondant au schéma de factorisation approchée avec l'algorithme correspondant de résolution des conditions aux limites (cf. ch. 2.5 et 2.6).

4.4.6 Le schéma itératif avec des paramètres complémentaires proposé par V. P. Ilyine a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= k_1 \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} + \Lambda_2 (u^{n+\frac{2}{3}} - u^n) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \Lambda_2 \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^n}{\tau} + \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right\} |4.103|$$

Après élimination des pas fractionnaires, nous avons :

$$(E - \tau \Lambda_1) (E - \tau \Lambda_2) (E - \tau \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (1 + k_1) (1 + k_2) \Lambda u^n \quad |4.104|$$

Posant $(1 + k_1) (1 + k_2) = \frac{1}{\alpha}$ nous démontrons l'équivalence du schéma (4.103) avec les schémas à corrections stabilisatrices, à corrections d'approximation et à opérateur stabilisateur.

1. La forme (4.101) a été montrée pour la première fois dans les travaux de E. G. DIAKONOV [95], [90] et A. A. SAMARSKY [91].

4.4.7 Schéma avec des opérateurs singuliers

Contrairement au schéma précédent, le schéma à opérateurs singuliers ne nécessite que deux pas fractionnaires, comme dans le cas à deux variables.

On a ici : $\Lambda = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i = \Omega_1 + \Omega_2$

$$\Omega_1 = \frac{T_{-1} - E}{h_1^2} + \frac{T_{-2} - E}{h_2^2} + \frac{T_{-3} - E}{h_3^2};$$

$$\Omega_2 = \frac{T_1 - E}{h_1^2} + \frac{T_2 - E}{h_2^2} + \frac{T_3 - E}{h_3^2} \quad |4.105|$$

A la représentation (4.105) correspondent les schémas équivalents :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \Omega_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n \right) \quad |4.106|$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Omega_2 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

et :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \alpha \Omega_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \beta \Omega_2 u^n \quad |4.107|$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \beta \Omega_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \alpha \Omega_2 u^{n+1}$$

4.5 Schémas itératifs pour les équations elliptiques

Pour l'équation elliptique :

$$\mathfrak{L} u + f = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f = 0 \quad |4.108|$$

le parallèle entre les schémas itératifs et les schémas d'intégration du problème parabolique correspondant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f \quad |4.109|$$

est toujours valable.

Mais la série de schémas ayant la propriété de consistance totale et de forte stabilité pour l'équation de Laplace perd cette propriété dans le cas de l'équation (4.108).

Donnons une analyse rapide des schémas itératifs pour l'équation (4.108) avec $f = 0$.

4.5.1 Schéma des directions alternées

Il est ici inapplicable car il perd la propriété de forte stabilité pour $m \geq 2$ (cf. ch. 2.4).

4.5.2 Schéma de désintégration (cf. 2.4) pour $m = 2$

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{12} u^n$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_{21} u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{22} u^{n+1}$$

Le schéma équivalent en pas entiers :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) u^{n+1} + 2 \Lambda_{12} u^n - (\Lambda_{11} \Lambda_{22} u^{n+1} - \Lambda_{12}^2 u^n)$$

est fortement stable mais n'est pas totalement consistant. Cette remarque est valable aussi pour le schéma de désintégration (cf. 2.42) pour $m = 3$.

5.3 Schémas à corrections stabilisatrices

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{m}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{m}} + (\Omega - \Lambda_{11}) u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{m}} - u^{n+\frac{1}{m}}}{\tau} &= \Lambda_{22} \left(u^{n+\frac{2}{m}} - u^{n+\frac{1}{m}} \right) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{m-1}{m}}}{\tau} &= \Lambda_{mm} (u^{n+1} - u^{n+\frac{m-1}{m}}) \\ \Omega &= \sum_{i,j=1}^m \Lambda_{ij} \end{aligned} \right\} \quad [4.110]$$

Ce schéma est équivalent aux schémas en pas entiers :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + (\Omega - \Lambda) u^n - \tau \sum_{i < j} \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} (u^{n+1} - u^n)$$

$$+ \tau^2 \sum_{i < j < k} \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} \Lambda_{kk} (u^{n+1} - u^n) + (-1)^{m-1} \Lambda_{11} \dots \Lambda_{mm} \tau^{m-1} (u^{n+1} - u^n)$$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_{ii}, \quad i, j, k = 1, \dots, m \quad [4.111]$$

D'où la consistance totale quel que soit m . L'expression de ρ est :

$$\rho = \frac{1 - 2 \sum_{i < j} l_{ij} + \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \sum_{i < j < k} l_{ii} l_{jj} l_{kk} + \dots + l_{11} l_{22} \dots l_{mm}}{\prod_{i=1}^m (1 + l_{ii})} \quad |4.112|$$

$$\rho = \frac{1 - 2 \sum_{i < j} l_{ij} + \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \dots + l_{11} \dots l_{mm}}{1 + \sum_{i=1}^m l_{ii} + \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \dots + l_{11} \dots l_{mm}} \quad |4.113|$$

avec $l_{ii} = 4 \tau a_{ii} \frac{\sin^2 \frac{k_i h_i}{2}}{h_i^2}$

et

$$l_{ij} = \frac{4 \tau a_{ij}}{h_i h_j} \cos \frac{k_i h_i}{2} \cos \frac{k_j h_j}{2} \sin \frac{k_i h_i}{2} \sin \frac{k_j h_j}{2} = \frac{\tau a_{ij}}{h_i h_j} \sin k_i h_i \sin k_j h_j$$

Pour $m = 2$ le schéma est fortement stable si les conditions d'ellipticité sont vérifiées :

$$a_{11} > 0; \quad a_{22} > 0; \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

Avec des limitations plus strictes, le schéma sera fortement stable également pour $m \geq 3$ (cf. 2.43).

4.5.4 Schéma à corrections d'approximation

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2m}} - u^n}{\alpha \tau} &= \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{2m}}, \dots, \frac{u^{n+\frac{m}{2m}} - u^{n-\frac{m-1}{2m}}}{\alpha \tau} = \Lambda_{mm} u^{n+\frac{m}{2m}} \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega u^{n+\frac{m}{2m}} \end{aligned} \right\} \quad |4.114|$$

Après élimination des pas fractionnaires, on obtient :

$$(E - \alpha \tau \Lambda_{11})(E - \alpha \tau \Lambda_{22}) \dots (E - \alpha \tau \Lambda_{mm}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n \quad |4.115|$$

Par conséquent, le schéma à corrections d'approximation a la propriété de consistance totale.

On déduit de (4.115) l'expression de ρ :

$$\rho = \frac{1 - \sum_{i,j=1}^m l_{ij} + \alpha \sum_{i=1}^m l_{ii} + \alpha^2 \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \dots + \alpha^m l_{11} \dots l_{mm}}{1 + \alpha \sum_{i=1}^m l_{ii} + \alpha^2 \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \dots + \alpha^m l_{11} \dots l_{mm}} \quad |4.116|$$

Dans le cas $m = 2$, le schéma à corrections d'approximation est fortement stable pour $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

4.5.5 Schéma de l'opérateur majorant¹

Pour $m = 2$, il a la forme : $(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n$ |4.117|

L'équation $(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) u^{n+1} = [(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) + \tau \Omega] u^n$ |4.117'|

pour un second membre donné se résout par des itérations complémentaires (internes). Par conséquent, dans le schéma de l'opérateur majorant, l'opérateur aux différences elliptique Ω de forme générale est remplacé par un opérateur aux différences analogue à celui de Laplace.

4.5.6 Schéma de l'opérateur stabilisateur

Pour $m = 2$, il a la forme :

$$(E - \alpha\tau\Lambda_{11})(E - \alpha\tau\Lambda_{22}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n \quad |4.118|$$

Le schéma (4.118) est équivalent au schéma à corrections d'approximation. Le schéma (4.118) peut être réalisé sous la forme d'un schéma de factorisation approchée :

$$\left. \begin{aligned} (E - \alpha\tau\Lambda_{11}) u^{n+\frac{1}{2}} &= [(E - \alpha\tau\Lambda_{11})(E - \alpha\tau\Lambda_{22}) + \tau\Omega] u^n \\ (E - \alpha\tau\Lambda_{22}) u^{n+1} &= u^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} |4.119|$$

Remarquons que les schémas des opérateurs majorants et stabilisateurs proviennent du schéma de l'algorithme universel :

$$\frac{B u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n$$

Dans le premier cas, on effectue le remplacement de l'opérateur Ω par un opérateur B de structure plus simple, dans le second cas l'opérateur B est factorisé, vérifiant en même temps la condition de forte consistance.

Le schéma général de l'opérateur stabilisateur sera étudié au ch. 9.4.

1. Cf. [48], [49].

4.5.7 Schéma à récurrences diagonales

Montrons en conclusion de ce paragraphe le schéma de I. D. Sofronov [65] qui applique le prédicteur-correcteur et les récurrences diagonales basées sur la méthode de désintégration.

Pour simplifier, nous considérerons un domaine d'intégration carré

$$(h_1 = h_2 = h, \quad N_1 = N_2 = N), \quad m = 2.$$

$$\text{Posons : } \mathcal{L} = \mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{22} + M_{11} + M_{22} \quad |4.120|$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} &= (a_{11} - |a_{12}|) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ \mathcal{L}_{22} &= (a_{22} - |a_{12}|) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ M_{11} &= |a_{12}| (1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \\ M_{22} &= |a_{12}| (1 - \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \end{aligned} \quad |4.121|$$

$$\sigma = \text{sign}(a_{12}), \quad \xi_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad \xi_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

Soient $\Lambda_1, \Lambda_2, \Omega_1, \Omega_2$ les approximations centrales tridiagonales des opérateurs $\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{22}, M_{11}, M_{22}$, opérant sur les lignes de coordonnées et sur les diagonales correspondantes. Le schéma aux différences de désintégration, correspondant à la représentation (4.120), a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{8}} - u^n}{\tau/2} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{8}}; & \frac{u^{n+\frac{2}{8}} - u^{n+\frac{1}{8}}}{\tau/2} &= \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{8}} \\ \frac{u^{n+\frac{3}{8}} - u^{n+\frac{1}{8}}}{\tau/2} &= \Omega_1 u^{n+\frac{3}{8}}; & \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{3}{8}}}{\tau/2} &= \Omega_2 u^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad |4.122|$$

$$\text{Avec les conditions : } a_{11} \geq |a_{12}|; \quad a_{22} \geq |a_{12}| \quad |4.123|$$

les opérateurs Λ_1, Λ_2 ont des valeurs propres non positives et le schéma (4.122) est fortement stable et du premier ordre de précision.

Appliquant le correcteur :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^{n+\frac{1}{2}} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Omega_1 + \Omega_2) u^{n+\frac{1}{2}} \quad |4.124|$$

nous trouvons u^{n+1} avec la précision $O(\tau^2 + h^2)$.

Le schéma de désintégration avec correcteur fut étudié encore auparavant dans un autre ouvrage de I. D. Sofronov [66].

4.6 Schémas à pas variables

Jusqu'à présent nous n'avons étudié que des schémas itératifs à pas constant. Avec la réalisation du critère de forte stabilité et le choix correspondant de τ , la norme de l'opérateur de passage a la forme $(1 - Ch^2)$ pour les schémas explicites et $(1 - Ch)$ pour les schémas implicites. Dans l'un et l'autre cas, on peut accélérer la convergence en choisissant un paramètre d'itération variable τ_n .

Richardson a obtenu une sensible amélioration de la convergence des schémas explicites (4.39) en introduisant un pas variable. Cet ouvrage de Richardson et les ouvrages qui suivent (cf. [53]) ont permis, dans le cas des schémas itératifs explicites, de ramener le problème de la recherche des pas optimaux à la construction d'un polynôme s'éloignant de zéro de façon minimale. Supposons que l'on ait effectué m itérations avec les pas $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$.

Alors l'amplitude des harmoniques $\sin k_1 x_1 \times \sin k_2 x_2$ augmente de :

$$\varrho_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \mu) = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_m = (1 - \alpha_1 \mu) \dots (1 - \alpha_m \mu) \quad |4.125|$$

$$\text{Ici} \quad \alpha_s = 2 a^2 \tau_s; \quad \mu = \frac{2 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2} = \mu(k_1, k_2) \quad |4.126|$$

Les paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et par conséquent $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ sont choisis de manière à ce que la grandeur :

$$\varrho(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \max_{k_1, k_2} |\varrho_m[\alpha, \mu(k_1, k_2)]|,$$

$$\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1; \quad \mu_0 = \mu(1, 1), \mu_1 = \mu(N_1, N_2) \text{ soit minimale.} \quad |4.127|$$

Ce problème se remplace par un autre dans lequel le paramètre discret $\mu(k_1, k_2)$ est remplacé par le paramètre continu μ parcourant l'intervalle $[\mu(1, 1), \mu(N_1, N_2)]$. Par conséquent le choix du pas optimal d'itération revient au problème : trouver dans la famille (4.125) le polynôme $\varrho(\alpha, \mu)$ s'éloignant le moins possible de 0. Sur l'intervalle $[\mu_0, \mu_1]$ on sait (cf. [54]) que la solution de ce problème est la fonction :

$$\varrho_m(x) = \frac{T_m\left(\frac{\mu_1 + \mu_0 - 2x}{\mu_1 - \mu_0}\right)}{T_m\left(\frac{\mu_1 + \mu_0}{\mu_1 - \mu_0}\right)} \quad |4.128|$$

où les $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$ sont les polynômes de Tchebicheff.

Il se trouve qu'avec un tel choix du pas la vitesse de convergence augmente jusqu'à l'ordre (cf. [53], [27]) :

$$1 - O(h) \quad |4.129|$$

Dans le cas des schémas implicites l'expression de ϱ se complique.

Dans ce cas, pour la méthode des directions alternées, nous avons :

$$\varrho = \varrho_1 \dots \varrho_m = R(\alpha, \mu, \nu) = \prod_{s=1}^m \frac{1 - \alpha_s \mu}{1 + \alpha_s \mu} \frac{1 - \alpha_s \nu}{1 + \alpha_s \nu} \quad |4.130|$$

$$= R(\alpha, \mu) \cdot R(\alpha, \nu)$$

avec :

$$\alpha_s = \frac{1}{2} a^2 \tau_s; \quad \mu = \mu(k_1) = \frac{4 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2}; \quad \nu = \nu(k_2) = \frac{4 \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2} \quad |4.131|$$

$$R(\alpha, \mu) = \prod_{s=1}^m \frac{1 - \alpha_s \mu}{1 + \alpha_s \mu}, \quad R(\alpha, \nu) = \prod_{s=1}^m \frac{1 - \alpha_s \nu}{1 + \alpha_s \nu}$$

Le choix optimal du paramètre α_s correspond au problème variationnel :

$$\min_{\alpha} \left[\max_{k_1, k_2} |R(\alpha, \mu, \nu)| \right], \quad k_1 = 1, \dots, N_1; \quad k_2 = 1, \dots, N_2 \quad |4.132|$$

qui après le passage des paramètres discrets $\mu(k_1), \nu(k_2)$ aux paramètres continus μ, ν se ramène au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} \left[\max_{\mu} |R(\alpha, \mu)| \right] \\ \min_{\alpha} \left[\max_{\nu} |R(\alpha, \nu)| \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mu \in [\mu(1), \mu(N_1)] \\ \nu \in [\nu(1), \nu(N_2)] \end{array} \quad \begin{array}{l} |4.133 \text{ a}| \\ |4.133 \text{ b}| \end{array}$$

Le problème (4.133) n'a pas encore reçu de solution complète mais des recherches encourageantes ont été effectuées (cf. à ce sujet [55]).

Comme dans [10] (cf. également [27]) indiquons un choix des paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ garantissant la diminution de la norme d'écart de $\frac{1}{q}$ fois ($q < 1$) après m pas et estimons m en fonction de h .

Supposons pour simplifier $h = h_1 = h_2, 1 \leq k_s \leq N, s = 1, 2, (N+1)h = \pi$. Nous donnons $m, h, q < 1$, divisons l'intervalle $(1, N)$ en sous-intervalles $(k_i, k_{i+1}), k_1 = 1, \dots, k_m = N$ tels que la condition (4.134) soit vérifiée :

$$q = \frac{1 - \alpha_1 \mu_1}{1 + \alpha_1 \mu_1} = - \frac{1 - \alpha_1 \mu_2}{1 + \alpha_1 \mu_2} = \frac{1 - \alpha_2 \mu_2}{1 + \alpha_2 \mu_2} = \dots = - \frac{1 - \alpha_{m-1} \mu_m}{1 + \alpha_{m-1} \mu_m} = \frac{1 - \alpha_m \mu_m}{1 + \alpha_m \mu_m},$$

$$\mu_s = \mu(k_s) \quad |4.134|$$

ce qui est possible puisque la grandeur : $q(\alpha, k) = \frac{1 - \alpha \mu(k)}{1 + \alpha \mu(k)} \quad |4.135|$

pour $\alpha > 0, k > 0$ ne dépasse pas 1 en module et est une fonction décroissante de k pour α fixé et de α pour k fixé.

Pour k dans l'intervalle $[k_s, k_{s+1}]$ la grandeur $q(\alpha_s, k)$ ne dépasse pas q en module et en dehors de l'intervalle ne dépasse pas 1 en module. Par conséquent, après m itérations, chaque harmonique diminue en amplitude de au moins $\frac{1}{q}$ fois.

Estimons la grandeur m . Supposant h suffisamment petit, nous avons :

$$\mu_s \approx k_s^2 \quad |4.136|$$

D'où d'après (4.134) :

$$\left. \begin{aligned} (1 - q) - \alpha_s (1 + q) \mu_s &= 0 \\ (1 + q) - \alpha_s (1 - q) \mu_{s+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad |4.137|$$

Éliminant de (4.137) α_s , nous avons : $\frac{\mu_{s+1}}{\mu_s} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2$ |4.138|

Utilisant (4.136), nous avons : $\frac{k_{s+1}}{k_s} \approx \frac{1+q}{1-q}$, $s = 1, 2, \dots, m$ |4.139|

Élevant (4.138) à la puissance m , nous obtenons :

$$N = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^m, \quad m \approx \frac{\text{Log } N}{\text{Log } \frac{1+q}{1-q}} \approx \frac{\text{Log } 1/h}{\text{Log } \frac{1+q}{1-q}} \approx \frac{\text{Log } 1/h}{2q} \quad |4.140|$$

L'égalité (4.140) est une estimation asymptotique avec une constante indéterminée. Montrons (cf. [10]) que dans le cas du schéma des directions alternées après un choix convenable des pas $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ la solution itérative u^n deviendra la solution exacte du problème de Dirichlet après $m = N$ itérations dans le cas d'un carré et après $m = N_1 + N_2$ itérations dans le cas d'un rectangle. Si l'on choisit $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$, $m = N_1 + N_2$ d'après les conditions :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mu_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\mu_2}, \dots, \quad \alpha_{N_1} = \frac{1}{\mu_{N_1}} \quad |4.141 \text{ a}|$$

$$\alpha_{N_1+1} = \frac{1}{\nu_1}, \quad \alpha_{N_1+2} = \frac{1}{\nu_2}, \dots, \quad \alpha_{N_1+N_2} = \frac{1}{\nu_{N_2}} \quad |4.141 \text{ b}|$$

où
$$\mu_{k_1} = \frac{4 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2}, \quad \nu_{k_2} = \frac{4 \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2},$$

alors : $R(\alpha, \mu, \nu) = \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m = 0$ |4.142|

quels que soient k_1 et k_2 .

Dans le cas d'un carré, quand $h = h_1 = h_2$, $N = N_1 = N_2$, il suffit de remplir la condition (4.141 a), c'est-à-dire qu'il suffit de faire N itérations.

4.7. Schémas itératifs, basés sur les schémas d'intégration des équations hyperboliques

Posons en correspondance avec l'équation de Laplace $\Delta \Phi = 0$ l'équation des oscillations amorties :

$$b \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Phi, \quad b > 0 \quad |4.143|$$

Transformons (4.143) en système, posant :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = u_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = u_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -q = a^2 v \quad |4.144|$$

De (4.144) on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= -a^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - bq \end{aligned} \quad |4.145|$$

Passant en v , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - bv \end{aligned} \quad |4.146|$$

Au premier pas fractionnaire, on intègre le système :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad |4.147|$$

à l'aide du schéma majorant implicite à pas courant qui, avec les variables u_1, u_2, v , a la forme :

$$K_1 f^{n+\frac{1}{2}} = M_1 f^n \quad |4.148|$$

avec :

$$K_1 = \begin{vmatrix} 2\Phi_1\Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 2\Phi_1\Psi_1 \end{vmatrix} \quad M_1 = \begin{vmatrix} \Phi_1 + \Psi_1 & 0 & a(\Phi_1 - \Psi_1) \\ 0 & E & 0 \\ \frac{1}{a}(\Phi_1 - \Psi_1) & 0 & \Phi_1 + \Psi_1 \end{vmatrix} \quad |4.149|$$

$$\Phi_1 = E + \frac{a\tau}{h_1} \Delta_{-1}, \quad \Psi_1 = E - \frac{a\tau}{h_1} \Delta_1, \quad f = (u_1, u_2, v)$$

Au deuxième pas fractionnaire, on intègre le système :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad |4.150|$$

à l'aide du schéma analogue : $K_2 f^{n+1} = M_2 f^{n+1/2}$ |4.151|

où :

$$K_2 = \begin{vmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 2\Phi_2\Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Phi_2\Psi_2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 + \Psi_2 & a(\Phi_2 - \Psi_2) \\ 0 & \frac{1}{a}(\Phi_2 - \Psi_2) & \Phi_2 - \Psi_2 \end{vmatrix} \quad |4.152|$$

$$\Phi_2 = E + \frac{a\tau}{h_2} \Delta_{-2}, \quad \Psi_2 = E - \frac{a\tau}{h_2} \Delta_2, \quad f = (u_1, u_2, v)$$

On voit facilement que les formules (4.148), (4.151) sont équivalentes aux formules (3.35) et (3.36).

Ensuite, on applique le correcteur : $\frac{f^{n+2} - f^n}{2\tau} = \Omega f^n$ |4.153|

où

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_1} \\ 0 & 0 & -a^2 \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_2} \\ \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_1} & \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_2} & -b \end{vmatrix} \quad |4.154|$$

On peut appliquer également le schéma de l'opérateur stabilisateur :

$$K_1 K_2 \frac{f^{n+2} - f^n}{2\tau} = \Omega f^n \quad |4.155|$$

4.8 Résolution des problèmes aux limites de l'équation de Poisson

Montrons que la résolution des problèmes aux limites de l'équation de Poisson, même à l'aide de schémas fortement stables et totalement consistants, nécessite une approximation spéciale du second membre¹.

Pour l'équation de Poisson dans le domaine $G : \{0 < x_i < \pi, i = 1, 2\}$

$$\Delta u + q = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad |4.156|$$

avec les conditions aux limites :

$$u(s) = f(s) \quad (x_1(s), x_2(s)) \in \gamma \quad |4.157|$$

1. Ceci a été montré par E. G. DIAKONOV et A. A. SAMARSKY.

on peut appliquer le schéma de désintégration :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 (au^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n) + q_1 \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 (au^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}}) + q_2 \end{aligned} \right\} \quad |4.158|$$

où q_1 et q_2 sont des seconds membres indéterminés pour l'instant.
Le schéma en pas entiers a la forme :

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \beta\tau\Lambda_1)(E + \beta\tau\Lambda_2)u^n + \tau Q \quad |4.159|$$

où
$$Q = B_2q_1 + A_1q_2 = (E + \beta\tau\Lambda_2)q_1 + (E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2$$

Dans le cas de l'équation de Laplace ($q = 0$) pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $q_1 = q_2 = 0$ nous avons le schéma à consistance totale.

Pour avoir une consistance totale à l'équation de Poisson, il est également nécessaire d'avoir :

$$Q = q \quad |4.160|$$

Posant $q_1 = 0$, nous avons : $(E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2 = q \quad |4.161|$

Comme $\|E - \tau\alpha\Lambda_1\|^{-1} \leq 1$, l'équation (4.161) est résoluble à l'aide de la récurrence habituelle.

4.9 Schémas itératifs sur la moyenne

Jusqu'à présent nous n'avons étudié la convergence des itérations qu'en pas entiers. Montrons que dans certains cas il est utile d'étudier les grandeurs et pour les pas entiers, et pour les pas fractionnaires.

Posons, comme d'habitude, le problème aux limites de type elliptique :

$$\mathfrak{L}u + q = 0, \quad u(s) = f(s) \quad |4.162|$$

en correspondance avec le schéma itératif :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 (au^{n+\frac{1}{2}} + \beta u^n) + q_1; \quad \alpha + \beta = 1 \quad |4.163 \text{ a}|$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (au^{n+1} + \beta u^{n+\frac{1}{2}}) + q_2 \quad |4.163 \text{ b}|$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \approx \mathfrak{L} \quad |4.164|$$

Les opérateurs Λ sont indépendants de τ et la consistance de (4.164) est totale. Prolongeons l'égalité (4.163) :

$$\frac{u^{n+\frac{3}{2}} - u^{n+1}}{\tau} = \Lambda_1 (au^{n+\frac{3}{2}} + \beta u^{n+1}) + q_1 \quad |4.165|$$

Réunissant (4.163 a) et (4.163 b), (4.163 b) et (4.165), nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 (\alpha v^n + \beta u^n) \Lambda_2 (au^{n+1} + \beta v^n) + Q & |4.166 a| \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} &= \Lambda_1 (\alpha v^{n+1} + \beta u^{n+1}) + \Lambda_2 (au^{n+1} + \beta v^n) + Q & |4.166 b| \end{aligned} \right\}$$

où l'on a posé : $v^n = u^{n+\frac{1}{2}}$, $v^{n+1} = u^{n+\frac{3}{2}}$, $Q = q_1 + q_2$ |4.167|

Enfin réunissant (4.166 a) et (4.166 b), nous avons :

$$\frac{(u^{n+1} + v^{n+1}) - (u^n + v^n)}{\tau} = \Lambda_1 [\alpha (v^n + v^{n+1}) + \beta (u^n + u^{n+1})] + 2 \Lambda_2 (au^{n+1} + \beta v^n) + 2 Q \quad |4.168|$$

Sous l'hypothèse de la forte stabilité du schéma (4.163) :

$$u^n \rightarrow u, \quad v^n \rightarrow v \quad |4.169|$$

et de (4.168) et (4.169) on tire :

$$\Lambda_1 (\alpha v + \beta u) + \Lambda_2 (au + \beta v) + Q = 0$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ nous obtenons : $\Lambda \left(\frac{u + v}{2} \right) + Q = 0$ |4.170|

Si l'on pose : $Q = q_1 + q_2 = q$ |4.171|

alors (4.170) indique que la grandeur *moyenne* $\frac{u^n + u^{n+\frac{1}{2}}}{2}$ converge vers la solution exacte u du problème aux différences aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda u + q &= 0 \\ u(s) &= f(s) \end{aligned} \right\} \quad |4.172|$$

Remarquons que le procédé indiqué pour obtenir une solution à la limite devient préférable dans le cas de la frontière arbitraire et des coefficients variables. En effet, nous avons démontré la convergence de la demi-somme des pas fractionnaires en n'excluant aucun pas fractionnaire et en n'exigeant pas la commutativité des opérateurs aux différences qui n'est pas vérifiée dans le cas des coefficients variables et de la frontière arbitraire. Birkhoff et Varga dans leur analyse de la convergence de la méthode des directions alternées (cf. [56]) ont montré que la commutativité était un élément essentiel dans la démonstration de la convergence. Apparemment,

cette objection tombe avec ce dernier procédé de passage à la limite. Il est clair que l'algorithme est applicable pour des opérateurs Λ_1, Λ_2 quelconques. Dans le cas de l'équation de Laplace il est indiqué dans l'ouvrage [57].

4.10 Réduction des schémas à consistance non totale à des schémas à consistance totale

Dans le cas des schémas itératifs, l'analyse des conditions aux limites proposée dans le ch. 2.9 est pleinement applicable. La détérioration de l'approximation près de la frontière conduit au fait que, même si le schéma en pas entiers possède la consistance totale, le schéma en pas fractionnaires peut ne pas la posséder.

Étudions, par exemple, le schéma en pas entiers :

$$\left. \begin{aligned} \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) u^{n+1} &= \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) u^n \\ (x_1, x_2) \in G &= \{ 0 < x_i < \Pi, i = 1, 2 \} \\ u^n(x_1, x_2) &= u^{n+1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \text{ pour } (x_1, x_2) \in \gamma \end{aligned} \right\} |4.173|$$

Le schéma de désintégration :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \frac{u^n + u^{n+\frac{1}{2}}}{2}; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + u^{n+1}}{2} \end{aligned} \right\} |4.174|$$

pour lequel sont posées les conditions aux limites :

$$u^n(x_1, x_2) = u^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2) = u^{n+1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \text{ pour } (x_1, x_2) \in \gamma |4.175|$$

ne remplit pas les conditions de consistance totale, puisque le schéma en pas entiers qui est équivalent, avec les mêmes conditions aux limites (4.175), a la forme (cf. ch. 2.9) :

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) u^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right) u^n + R |4.176|$$

où $R \neq 0$ sur ω .

Appliquant la méthode des fonctions indéterminées et posant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \frac{u^n + u^{n+\frac{1}{2}}}{2} + q_1 \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + u^{n+1}}{2} + q_2 \end{aligned} \right\} |4.177|$$

on peut choisir q_1 et q_2 tels que $R = 0$ et que les conditions aux limites (4.175) soient vérifiées (cf. ch. 2.9).

Après cela, (4.177) devient un schéma à consistance totale. On peut opérer de façon analogue dans le cas où le schéma ne possède pas la consistance totale, en vertu de la structure de l'opérateur aux différences et pas seulement à cause des conditions aux limites. Nous allons l'illustrer par un exemple de schéma de désintégration. On sait que dans le cas tridimensionnel le schéma de désintégration n'est pas à consistance totale. Étudions alors le schéma de désintégration suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left(\alpha u^{n+\frac{1}{3}} + \beta u^n \right) + q_1 \\ \frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left(\alpha u^{n+\frac{2}{3}} + \beta u^{n+\frac{1}{3}} \right) + q_2 \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \Lambda_3 \left(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+\frac{2}{3}} \right) + q_3 \end{aligned} \right\} \quad |4.178|$$

avec les seconds membres indéterminés q_1, q_2, q_3 .

Le schéma en pas entiers correspondant a la forme :

$$\begin{aligned} (E - \alpha\tau\Lambda_1) (E - \alpha\tau\Lambda_2) (E - \alpha\tau\Lambda_3) u^{n+1} \\ = (E + \beta\tau\Lambda_1) (E + \beta\tau\Lambda_2) (E + \beta\tau\Lambda_3) u^n + \tau Q \end{aligned} \quad |4.179|$$

où

$$\begin{aligned} Q = (E + \beta\tau\Lambda_2) (E + \beta\tau\Lambda_3) q_1 + (E - \alpha\tau\Lambda_1) (E + \beta\tau\Lambda_3) q_2 \\ + (E - \alpha\tau\Lambda_1) (E - \alpha\tau\Lambda_2) q_3 \end{aligned}$$

Mettons le schéma (4.179) sous la forme :

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1) (E - \alpha\tau\Lambda_2) (E - \alpha\tau\Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + R \quad |4.180|$$

où

$$\begin{aligned} R = [\tau (\beta^2 - \alpha^2) (\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3) \\ + \tau^2 (\beta^3 + \alpha^3) \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3] u^n + Q = \Phi u^n + Q \end{aligned} \quad |4.181|$$

Exigeons maintenant que le schéma (4.178) soit de consistance totale. Pour cela il faut et il suffit que l'on ait $R = 0$.

Si l'on pose à l'intérieur du domaine G : $q_1 = q_2 = 0$, alors nous avons pour q_3 :

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1) (E - \alpha\tau\Lambda_2) q_3 = - \Phi u^n \quad |4.182|$$

Déterminant q_1, q_2, q_3 sur la frontière grâce aux conditions aux limites, nous pouvons déterminer q_3 à partir de (4.182). Pour le choix indiqué de q_1, q_2, q_3 le schéma (4.178) devient totalement consistant.

5.1 Équation de l'équilibre élastique et des oscillations élastiques

La déformation d'un corps plat élastique est caractérisée par le tenseur (tenseur de déformation) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad |5.1|$$

La tension du corps, produite par la déformation, est caractérisée par le tenseur de tension σ_{ij} . D'après la loi de Hooke, les tenseurs σ_{ij} et ε_{ij} sont liés par la relation linéaire :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad |5.2|$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \operatorname{div} \vec{u}$ et $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ et λ, μ sont les coefficients de Lamé.

Les conditions de l'équilibre élastique sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad |5.3|$$

où X_1 et X_2 sont les composantes des forces massiques.

D'après le principe de d'Alembert, les équations des oscillations élastiques ont la forme

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho X_1 &= 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho X_2 &= 0 \end{aligned} \quad |5.4|$$

où ρ est la densité de la matière.

Utilisant (5.1) et (5.2), on peut écrire (5.4) sous la forme :

$$-\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{X} = 0 \quad |5.5|$$

On peut mettre également (5.3) sous une forme correspondante.

On peut écrire (5.5) sous une forme légèrement différente :

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho X_1 &= 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho X_2 &= 0 \end{aligned} \quad |5.6|$$

On peut modifier les équations (5.3) de la même façon.

Dans le cas où il n'y a pas de forces massiques ($X_1 = X_2 = 0$), posant :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad |5.7|$$

nous transformons (5.3) en une identité.

La fonction ψ n'est pas quelconque. Les équations (5.7) constituent un système indéterminé d'équations pour u_i .

Il est facile de montrer que la condition de comptabilité de ce système est :

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad |5.8|$$

En effet, introduisant la quantité :

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad |5.9|$$

nous avons :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \varepsilon_{12} - \omega \quad |5.10|$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \varepsilon_{12} + \omega; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} \quad |5.11|$$

Les conditions de comptabilité de (5.10) et (5.11) donnent :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \quad |5.12|$$

et

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \quad |5.13|$$

Enfin les conditions de comptabilité de (5.12) et (5.13) donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \right) \\ = \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad |5.14|$$

En utilisant (5.2) et (5.7), la condition (5.14) conduit à (5.8).

L'analyse harmonique de la stabilité de l'équation (5.5) montre que les oscillations élastiques ne s'amortissent pas, par conséquent la solution de (5.3) ne peut être obtenue à partir de la solution de (5.3) par un passage au régime stationnaire.

Nous allons décrire l'amortissement des oscillations élastiques à l'aide de l'équation :

$$\alpha \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \beta \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{X}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad |5.15|$$

L'équation (5.15) nous permettra d'obtenir également un schéma itératif de résolution de l'équation stationnaire. Pour obtenir des schémas simples nous pouvons également utiliser l'équation de type purement parabolique :

$$\alpha \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{X} \quad |5.16|$$

On peut procéder de façon analogue pour l'équation (5.8). Nous allons faire correspondre à (5.8) l'équation :

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta \Delta \psi = 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad |5.17|$$

ou plus simplement l'équation :

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \Delta \psi = 0 \quad |5.18|$$

5.2 Problème aux limites de la théorie de l'élasticité

On peut poser pour l'équation (5.5) les problèmes suivants :

5.2.1 Premier problème aux limites

Sur la frontière γ du domaine plan G on donne les déformations u_1 et u_2 comme fonctions de s (*abscisse curviligne sur γ*) et t :

$$\vec{u}(s) = \vec{f}(s, t) \quad |5.19|$$

5.2.2 Deuxième problème aux limites

Sur la frontière γ on donne les tensions normales et tangentielles :

$$\sigma_n(s) = f_1(s, t), \quad \sigma_\tau(s) = f_2(s, t) \quad |5.20|$$

Dans le cas du problème stationnaire, les fonctions $f_1(s)$, $f_2(s)$ doivent satisfaire une condition supplémentaire qui est celle de l'équilibre du corps considéré comme solide.

5.2.3 Problème aux limites mixte

Sur une partie de la frontière, on donne les déformations, sur l'autre les tensions.

5.2.4 Le cas de l'équation biharmonique (5.8) ou de l'équation non homogène correspondante :

$$\Delta\Delta\psi + q = 0 \quad |5.21|$$

nous allons étudier le problème aux limites du type suivant :

$$\psi = 0, \quad \Delta\psi = f(s) \quad |5.22|$$

Nous obtenons les équations (5.21) et (5.22), par exemple, dans le cas d'une plaque à appui libre.

Dans ce cas, ψ s'interprète comme la déformation du plan médiateur de la plaque, q comme la charge, $f(s) = 0$ (cf. par exemple [58]).

5.3 Schéma d'intégration des équations d'évolution de l'élasticité

Pour les équations (5.5) et (5.6) avec $\rho = 1$ on peut appliquer un schéma explicite du second ordre de précision :

$$\begin{aligned} & -\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} u_i^n + \mu \frac{\Delta_{3-i} \Delta_{-3+i}}{h_{3-i}^2} u_i^n \\ & + (\lambda + \mu) \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4h_1 h_2} u_{3-i}^n + X_i^n = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad |5.23|$$

A. N. Konovalov [59] a proposé pour (5.5), (5.6) un schéma implicite du second ordre de précision, basé sur l'idée de factorisation approchée d'un opérateur. Examinons le schéma :

$$\begin{aligned} & -\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2} \\ & + \mu \frac{\Delta_{3-i} \Delta_{-3+i}}{h_{3-i}^2} \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2} + (\lambda + \mu) \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4h_1 h_2} u_{3-i}^n \\ & + X_i^n = -\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \Lambda_{ii} (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) \\ & + \frac{\mu}{2} \Lambda_{3-i, 3-i} (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + (\lambda + \mu) \Lambda_{12} u_{3-i}^n + X_i^n = 0 \end{aligned} \quad |5.24|$$

$$i = 1, 2 \quad \text{avec} \quad \Lambda_{ii} = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2}; \quad \Lambda_{12} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4h_1 h_2}$$

Le schéma (5.24) est du second ordre de précision, il est absolument stable, mais sa réalisation est difficile. Factorisant l'opérateur au niveau supérieur de (5.24), nous obtenons :

$$\left[E - \frac{\tau^2}{2} (\lambda + 2\mu) \Lambda_{ii} \right] \left(E - \frac{\tau^2}{2} \mu \Lambda_{3-i, 3-i} \right) (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) = 2 u_i^n + (\lambda + \mu) \tau^2 \Lambda_{12} u_{3-i}^n + X_i^n \tau^2 \quad i = 1, 2 \quad |5.25|$$

Le schéma (5.25) est du second ordre de précision, il est absolument stable et se réalise à l'aide de récurrences tridiagonales.

Par la méthode des inéquations énergétiques, A. N. Konovalov a démontré la convergence du schéma (5.25) pour le premier problème aux limites.

5.4 Schémas itératifs de résolution de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique

Comme précédemment, nous allons considérer les schémas itératifs de résolution de l'équation

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad |5.26|$$

comme des schémas d'intégration de l'équation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{12} + \mathfrak{L}_{21} + \mathfrak{L}_{22}) \psi = 0 \quad |5.27|$$

avec

$$\mathfrak{L}_{ij} = \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}, \quad i, j = 1, 2$$

5.4.1 Schéma de désintégration

Construisons ce schéma comme dans le cas de l'équation de la chaleur du type général (cf. ch. 2.4) :

$$\frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} - \psi^n}{\tau} + \Lambda_{11} \psi^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{12} \psi^n = 0$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \Lambda_{21} \psi^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{22} \psi^{n+1} = 0 \quad |5.28|$$

avec :

$$\Lambda_{ii} = \left(\frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} \right)^2, \quad i = 1, 2$$

et

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_2 \Delta_{-2}}{(h_1 h_2)^2} \quad |5.29|$$

Le schéma en pas entiers correspondant a la forme :

$$(E + \tau\Lambda_{11})(E + \tau\Lambda_{12})\psi^{n+1} = (E - \tau\Lambda_{12})^2\psi^n \quad |5.30|$$

D'où la forte stabilité du schéma :

$$\rho = \frac{(1 - a_1 a_2)^2}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)}, \quad a_i = -\frac{4\sqrt{\tau} \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}}{h_i^2} \quad |5.31|$$

Prenant en considération l'identité :

$$\Lambda_{11}\Lambda_{22} = (\Lambda_{12})^2 \quad |5.32|$$

nous voyons que, contrairement à l'équation de la chaleur, le schéma de désintégration (5.42) de l'équation biharmonique est totalement consistant.

5.4.2 Schémas à corrections stabilisatrices

Dans l'ouvrage de Conte et Dames [60] le schéma à corrections stabilisatrices de Douglas-Rachford est étendu au cas de l'équation biharmonique :

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} - \psi^n}{\tau} + \Lambda_{11}\psi^{n+\frac{1}{2}} + 2\Lambda_{12}\psi^n + \Lambda_{22}\psi^n &= 0 \\ \frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \Lambda_{22}(\psi^{n+1} - \psi^n) &= 0 \end{aligned} \quad |5.33|$$

Le schéma correspondant en pas entiers a la forme :

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})\psi^{n+1} + 2\Lambda_{12}\psi^n + \tau\Lambda_{12}\Lambda_{22}(\psi^{n+1} - \psi^n) = 0 \quad |5.33'|$$

(5.32) entraîne que le schéma (5.33) est équivalent à (5.30).

5.4.3 Schéma à corrections d'approximation

$$\frac{\psi^{n+\frac{1}{4}} - \psi^n}{\alpha\tau} + \Lambda_{11}\psi^{n+\frac{1}{4}} = 0 \quad |5.34 a|$$

$$\frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} - \psi^{n+\frac{1}{4}}}{\alpha\tau} + \Lambda_{22}\psi^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad |5.34 b|$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + \Lambda\psi^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad |5.34 c|$$

avec $\Lambda = \Lambda_{11} + 2\Lambda_{12} + \Lambda_{22}$.

Le schéma en pas entiers a la forme :

$$(E + \alpha\tau\Lambda_{11})(E + \alpha\tau\Lambda_{22}) \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + \Lambda\psi^n = 0 \quad |5.35|$$

est équivalent à (5.30) pour $\alpha = 1$.

5.4.4 Schéma à opérateur stabilisateur

$$A \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + \Lambda\psi^n = 0, \quad \Lambda = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + 2\Lambda_{12} \quad |5.36|$$

$$A = (E + \alpha\tau\Lambda_{11})(E + \alpha\tau\Lambda_{22})$$

est aussi équivalent à (5.30) pour $\alpha = 1$.

Par conséquent les schémas de désintégration, à corrections stabilisatrices et d'approximation (pour $\alpha = 1$) ainsi que le schéma à opérateur stabilisateur, constituent des réalisations différentes du même schéma homogène. Ils se distinguent de plus par la réalisation des conditions aux limites. Remarquons que les schémas de désintégration et à opérateur stabilisateur sont à deux niveaux et que les schémas de corrections sont à trois niveaux.

5.4.5 Schéma de désintégration pour les systèmes d'équations harmoniques

Pour quelques problèmes aux limites de l'élasticité comme, par exemple, le problème de la courbure transversale d'une plaque soutenant un poids et avec un appui libre, à la place de l'équation biharmonique il est plus commode d'utiliser un système de deux équations harmoniques. Pour le problème aux limites :

$$\Delta\psi = \varphi, \quad \Delta\varphi + q = 0 \quad |5.37|$$

$$\varphi(s) = f(s), \quad \psi(s) = g(s) \quad |5.38|$$

étudions le schéma de désintégration :

$$\frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_1 \left(\alpha\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \beta\varphi^n \right)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 \left(\alpha\varphi^{n+1} + \beta\varphi^{n+\frac{1}{2}} \right) + q$$

$$\frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} - \psi^n}{\tau} = \Lambda_1 \left(\alpha\psi^{n+\frac{1}{2}} + \beta\psi^n \right)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 \left(\alpha\psi^{n+1} + \beta\psi^{n+\frac{1}{2}} \right) + \varphi^{n+1}$$

|5.39|

Le schéma (5.39) est fortement stable et totalement consistant pour $\alpha = \frac{1}{2}$. Pour le passage à la limite, il faut prendre la demi-somme des valeurs des fonctions au pas entier et au pas fractionnaire (cf. ch. 4.9).

5.5 Schémas itératifs pour les systèmes d'équations des déplacements élastiques

Pour les équations de l'équilibre élastique dans les déplacements :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} &= 0 \end{aligned} \quad |5.40|$$

A. N. Konovalov [61] a proposé et étudié un schéma à corrections stabilisatrices :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1^{n+\frac{1}{2}} - u_1^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{12} u_1^n + \Omega u_2^n \\ \frac{u_2^{n+\frac{1}{2}} - u_2^n}{\tau} &= \Omega u_1^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{21} u_2^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{22} u_2^n \\ \frac{u_1^{n+1} - u_1^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_{12} (u_1^{n+1} - u_1^n) \\ \frac{u_2^{n+1} - u_2^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_{22} (u_2^{n+1} - u_2^n) \end{aligned} \right\} \quad |5.41|$$

$$\text{où} \quad \left. \begin{aligned} \Lambda_{11} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2}, \quad \Lambda_{12} = \mu \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2}, \quad \Lambda_{21} = \mu \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \\ \Lambda_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2}, \quad \Omega = (\lambda + \mu) \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2 h_1} \cdot \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2 h_2} \end{aligned} \right\} \quad |5.42|$$

A. N. Konovalov a démontré la convergence de ce schéma pour le premier problème aux limites dans un rectangle.

Une série de schémas à pas fractionnaires pour les équations de l'élasticité fut proposée également par A. A. Samarsky [96].

5.6 Conditions aux limites pour les problèmes de l'élasticité

Pour la résolution des problèmes aux limites du second ordre et mixtes, il est nécessaire de construire des schémas récurrents de calcul des conditions aux limites. Montrons-le sur l'exemple du problème aux limites suivant (fig. 5.1).

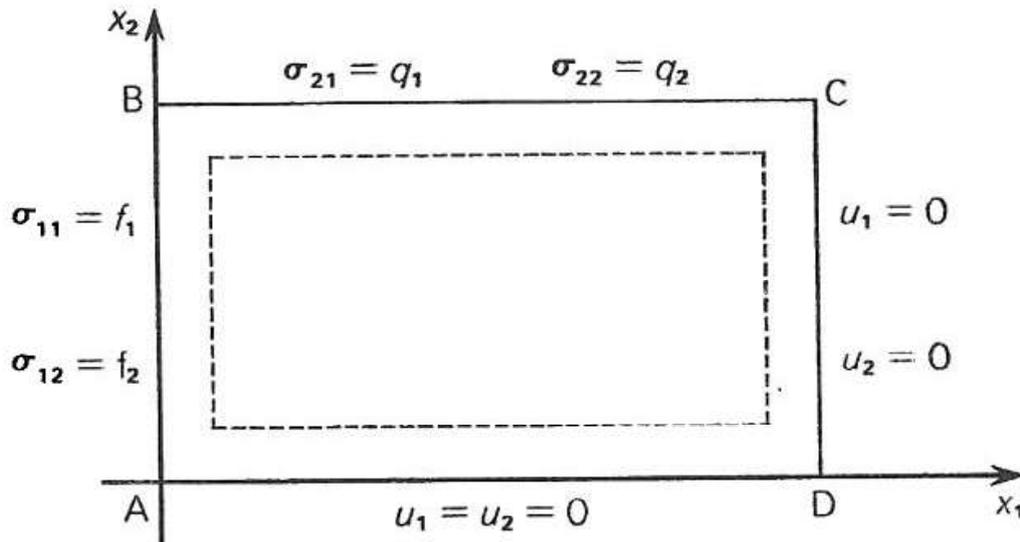


FIGURE 5.1. Résolution des problèmes aux limites *mixtes* pour les équations de l'élasticité dans un rectangle.

Écrivons les conditions aux limites sur la frontière verticale de gauche :

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= f_2 \\ \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= f_1 \end{aligned} \right] \quad |5.43|$$

Le système (5.43) est un système de type hyperbolique dans lequel, sur la frontière verticale, x_2 joue le rôle de la variable de temps et x_1 celui de la variable d'espace. Nous désignerons par u_1^n et u_2^n les valeurs de u_1 et u_2 sur la frontière. Nous désignerons par U_1^n et U_2^n les valeurs sur les points du maillage intérieurs et voisins de la frontière. L'approximation simple — explicite — de (5.43) a la forme :

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \mu \frac{u_2^n - U_2^n}{h_1} &= f_2^n \\ \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^n - U_1^n}{h_1} &= f_1^n \end{aligned} \right] \quad |5.44|$$

Pour la détermination de la stabilité de l'équation (5.44) pour $U_1^n, U_2^n, f_1^n, f_2^n$ fixés, formons les équations des variations (pour simplifier l'écriture, nous n'écrivons pas le signe variation δ) :

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \frac{u_2^n}{h_1} = 0,$$

$$\lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^n}{h_1} = 0 \quad |5.45|$$

d'où :

$$\vec{u}^{n+1} = C \vec{u}^n; \quad \vec{u} = \{u_1, u_2\}; \quad C = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \frac{h_2}{h_1} \\ \frac{\lambda + 2\mu h_2}{\lambda} & \frac{h_2}{h_1} \end{array} \right\| \quad |5.45'|$$

Examinons la norme de la matrice C du passage de (5.45').

Les solutions de son équation caractéristique ont l'expression :

$$\rho_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu h_2}{\lambda} \frac{h_2}{h_1}} \quad |5.46|$$

Par conséquent le rayon spectral et la norme de la matrice C sont plus grands que 1 et le calcul par récurrence est instable.

Appliquons l'approximation implicite :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \mu \frac{u_2^{n+1} - U_2^{n+1}}{h_1} = f_2^n \\ \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^{n+1} - U_1^{n+1}}{h_1} = f_1^n \end{array} \right] \quad |5.47|$$

L'équation aux variations a la forme :

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \frac{u_2^{n+1}}{h_1} = 0$$

$$\lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^{n+1}}{h_1} = 0 \quad |5.48|$$

d'où

$$\left. \begin{array}{l} u_1^n = u_1^{n+1} - \frac{h_2}{h_1} u_2^{n+1} \\ u_2^n = -\frac{\lambda + 2\mu h_2}{\lambda} \frac{h_2}{h_1} u_1^{n+1} + u_2^{n+1} \end{array} \right] \quad |5.49|$$

Pour la stabilité du calcul, il est indispensable que la matrice (inverse de la matrice de passage) :

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & -\frac{h_2}{h_1} \\ -\frac{\lambda + 2\mu h_2}{\lambda} \frac{h_2}{h_1} & 1 \end{array} \right\| \quad |5.50|$$

ait ses valeurs propres ≥ 1 . Les valeurs propres de la matrice (5.50) ont l'expression :

$$\rho_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu h_2}{\lambda} \frac{h_2}{h_1}} \quad |5.51|$$

Par conséquent la condition de stabilité a la forme : $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu h_2}{\lambda} \frac{h_2}{h_1}} \geq 2$ |5.52|

Dans l'écriture de schémas analogues sur l'horizontale supérieure, h_1 et h_2 échangent leurs rôles et nous obtenons : $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu h_1}{\lambda} \frac{h_1}{h_2}} \geq 2$ |5.53|

Le schéma sera donc instable sur l'un ou l'autre des côtés. Avec les conditions de stabilité sur le côté vertical, pour l'obtention de la stabilité du calcul de récurrence sur l'horizontale, il est nécessaire de faire un maillage soit plus espacé sur x_1 soit plus serré sur x_2 (1).

Nous allons indiquer un autre schéma de calcul des fonctions basé sur la méthode du calcul courant.

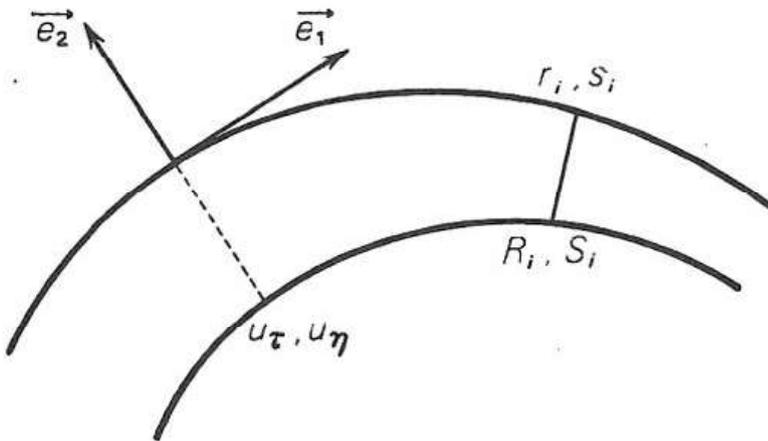


FIGURE 5.2. Conditions aux limites du second ordre dans le repère local.

Écrivons les conditions aux limites du second ordre sous forme itérative dans le repère local constitué par la tangente à la frontière orientée et par la normale extérieure (voir fig. 5.2).

Alors le vecteur-déplacement \vec{u} se présente sous la forme :

$$\vec{u} = u_\tau \vec{e}_1 + u_\eta \vec{e}_2 \quad |5.54|$$

1. Cette analyse de la stabilité appartient à A. N. KONOVALOV.

Contrairement au cas du rectangle, nous allons considérer \vec{e}_2 comme direction de temps et \vec{e}_1 comme direction d'espace et nous désignerons les coordonnées locales de Descartes par t , resp. x . Alors les conditions aux limites s'écrivent sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u_\tau}{\partial x} &= f_1 \\ \mu \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + \frac{\partial u_\eta}{\partial x} \right) &= f_2 \end{aligned} \right] \quad |5.55|$$

Écrivons (5.55) avec les invariants :

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c \frac{\partial r}{\partial x} = g_1, \quad \frac{\partial s}{\partial t} - c \frac{\partial s}{\partial x} = g_2 \quad |5.56|$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} r &= u_\eta + cu_\tau, \quad s = u_\eta - cu_\tau, \quad c = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}} \\ g_1 &= \frac{f_1}{\lambda + 2\mu} + c \frac{f_2}{\mu}, \quad g_2 = \frac{f_1}{\lambda + 2\mu} - c \frac{f_2}{\mu} \end{aligned} \right] \quad |5.57|$$

L'équation (5.56) se résout alors à l'aide du schéma implicite majorant :

$$\frac{r_i - R_i}{\tau} + c \frac{r_i - r_{i-1}}{h} = g_{1i}, \quad \frac{s_i - S_i}{\tau} - c \frac{s_{i+1} - s_i}{h} = g_{2i} \quad |5.58|$$

qui est stable quels que soient τ et h .

Dans le cas du domaine rectangle (fig. 5.1), sur le côté AB nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_\eta, \\ u_2 &= u_\tau, \quad t = -x_1, \\ x &= x_2, \quad \tau = h_1, \\ h &= h_2, \quad r = -u_1 + cu_2, \\ s &= -u_1 - cu_2 \end{aligned} \quad |5.59|$$

et sur le côté BC nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_\tau, \\ u_2 &= u_\eta, \quad t = x_2, \\ x &= x_1, \quad \tau = h_2, \\ h &= h_1, \quad r = u_2 + cu_1, \\ s &= u_2 - cu_1 \end{aligned} \quad |5.60|$$

Le passage des invariants (5.59) aux invariants (5.60) s'effectue sur un certain arc arrondissant l'angle ABC.

En conclusion de notre analyse des problèmes aux limites de l'élasticité, remarquons que n'ont été étudiés complètement que peu de problèmes et peu de méthodes.

Jusqu'à présent, nous avons étudié des schémas aux différences d'intégration donnant des précision d'ordre 0 ($\tau^\alpha + h^\beta$), $\alpha, \beta \leq 2$.

Il leur correspond des schémas itératifs de précision 0 (h^β). La méthode à pas fractionnaires peut être appliquée pour l'obtention de schémas simples de haute précision ($\beta > 2$).

6.1 Schémas homogènes de haute précision

Nous référant à des travaux de Douglas jr. et Gunn [62] et A. A. Samarsky [63], nous allons étudier une série de S. H. P. homogènes pour les équations de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad |6.1|$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = Cte \quad |6.2|$$

Pour une fonction quelconque suffisamment régulière $u(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$, les approximations suivantes sont vérifiées (on a posé $h = h_1 = h_2 = \dots = h_m$) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i^2} &= \Lambda_i u^n - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + 0(h^4) \\ \Delta u^n &= \Lambda u^n - \frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + 0(h^4) \end{aligned} \right\} |6.3|$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{3} \Lambda_i (u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + 0(\tau^2 + h^4) \\ \Delta u &= \frac{1}{3} \Lambda (u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) - \frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + 0(\tau^2 + h^4) \end{aligned} \right\} [6.4]$$

avec : $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$, $u^n(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_m, n\tau)$

La formule (6.4) entraîne que, pour la solution de l'équation (6.1), on a :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{1}{3} \Lambda (u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) - \frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + 0(\tau^2 + h^4) \quad [6.5]$$

Remarquons que dans le cas de l'équation (6.1) nous avons :

$$\Delta^2 u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = \Delta u_t = u_{tt} \quad [6.6]$$

Nous pouvons poser soit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} &= \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} - 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i \partial x_j} + 0(\tau^2) \\ &= \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} - 2 \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n + 0(\tau^2 + h^2) \end{aligned} \quad [6.7]$$

soit :

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} = \Lambda \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} - 2 \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n + 0(\tau^2 + h^2) \quad [6.8]$$

Réunissant (6.5), (6.7) et (6.8) nous obtenons le S. H. P. homogène :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} &= \frac{1}{3} \Lambda (u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) \\ &\quad - \frac{h^2}{12} \left[\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} - 2 \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n \right] \end{aligned} \quad [6.9]$$

c'est-à-dire, en posant $r = \frac{\tau}{h^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} &= \frac{1}{3} \Lambda \left[\left(1 - \frac{1}{8r}\right) u^{n+1} + u^n \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{8r}\right) u^{n-1} \right] + \frac{h^2}{6} \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n \end{aligned} \quad [6.10]$$

De façon analogue, on obtient le S. H. P. à deux niveaux basé sur les approximations (6.3) et (6.6) :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{h^2}{12} \Lambda \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{h^2}{6} \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n \quad |6.11|$$

On peut écrire le schéma (6.11) sous la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \alpha \Lambda u^{n+1} + (1 - \alpha) \Lambda u^n + \frac{h^2}{6} \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n,$$

$$\alpha = 0,5 \left(1 - \frac{h^2}{6\tau} \right) = 0,5 \left(1 - \frac{1}{6r} \right), \quad r = \frac{\tau}{h^2} \quad |6.12|$$

Les schémas (6.9), (6.10), (6.11) et (6.12) sont absolument stables et ont l'ordre d'approximation $O(\tau^2) + O(h^4)$.

6.2 Schémas factorisés de haute précision pour les équations de la chaleur

Les ouvrages de Douglas, Gunn [62], A. A. Samarsky [63], V. B. Andreïev et A. A. Samarsky [64] étudient des S. H. P. pour des équations paraboliques du type (6.1) et (6.2).

Les auteurs construisent des S. H. P. facilement réalisables avec un opérateur au niveau supérieur factorisé (*désintégré*). Ces schémas se construisent à partir du S. H. P. homogène à m échelons ($m \geq 2$) :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A u^{n+1} + f^n \quad |6.13|$$

où f^n est le résultat d'applications d'opérateurs aux différences spatiales aux fonctions u^n, u^{n-1}, \dots .

La méthode de construction de schémas factorisés, proposée par Douglas et Gunn [62], a la forme suivante :

Soit
$$A = \sum_{i=1}^m A_i \quad |6.14|$$

la décomposition de A en une somme d'opérateurs $A_i, i = 1, 2, \dots, m$.

On construit alors le schéma du type à *corrections stabilisatrices* :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{m}} - u^n}{\tau} &= A_1 \left(u^{n+\frac{1}{m}} - u^n \right) + A u^n + f^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{m}} - u^{n+\frac{1}{m}}}{\tau} &= A_2 \left(u^{n+\frac{2}{m}} - u^n \right) \\ \dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{m-1}{m}}}{\tau} &= A_m (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \right\} \quad |6.15|$$

Le schéma en pas entiers a la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A u^{n+1} + f^n + \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) \quad |6.16|$$

$$\Phi = -\tau^2 \sum_{i < j} A_i A_j + \tau^3 \sum_{i < j < k} A_i A_j A_k + \dots + (-1)^m \tau^m A_1 \dots A_m \quad |6.17|$$

Étudions les schémas factorisés correspondant à l'équation (6.1) ($m = 2$) et aux schémas (6.9) et (6.10).

Dans le cas (6.9), posons :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \Lambda - \frac{1}{6} \frac{h^2}{\tau^2} E \\ A_1 &= \frac{2}{3} \Lambda_1 - \frac{1}{6} \frac{h^2}{\tau^2} E \\ A_2 &= \frac{2}{3} \Lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad |6.18|$$

Pour $\frac{\tau}{h} = C^{te}$, les schémas (6.15) et (6.18) ont l'ordre 0 ($\tau^2 + h^4$) et sont absolument stables.

Pour le schéma (6.10), posons :

$$A = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{8r} \right) \Lambda, \quad A_i = \left(1 - \frac{1}{8r} \right) \frac{2}{3} \Lambda_i, \quad i = 1, 2 \quad |6.19|$$

Pour $\frac{\tau}{h^2} = C^{te}$, le schéma (6.15), (6.19) a la précision 0 ($\tau^2 + h^4$) et est absolument stable.

L'ouvrage de A. A. Samarsky [63] propose une autre méthode de construction d'opérateur factorisé.

Le schéma (6.13) peut être remplacé par le schéma :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= A u^{n+1} + f^n + \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) \\ &= A u^{n+1} + f^n + \frac{1}{\tau} \Phi (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \quad |6.20|$$

où l'opérateur indéterminé pour le moment Φ est choisi de manière à ce que l'opérateur au niveau supérieur du schéma (6.20) soit factorisé. Si la factorisation s'effectue en correspondance avec la décomposition (6.14), alors :

$$E - \tau A - \Phi = \prod_{i=1}^m (E - \tau A_i) \quad |6.21|$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi = E - \tau A - \prod_{i=1}^m (E - \tau A_i) &= -\tau^2 \sum_{i < j} A_i A_j \\ &+ \tau^3 \sum_{i < j < k} A_i A_j A_k + \dots + (-1)^{m-1} \tau^m A_1 \dots A_m \end{aligned} \quad |6.22|$$

Comparant les expressions (6.17) et (6.22), on constate que, étant tous deux issus de (6.13) et utilisant la même décomposition (6.14), les schémas (6.15) et (6.20) sont équivalents. Dans l'ouvrage [63] comme exemple de schéma issu de (6.13), fut pris le S. H. P. à deux niveaux (6.12).

Alors le schéma factorisé a la forme :

$$\prod_{i=1}^m (E - \alpha \tau \Lambda_i) u^{n+1} = \Omega u^n \quad |6.23|$$

dans lequel :

$$\begin{aligned} \Omega &= E + \tau \left[(1 - \alpha) \Lambda + \frac{h^2}{6} \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j \right] - \Phi, \\ \Phi &= -\alpha^2 \tau^2 \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j + \alpha^3 \tau^3 \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots \\ &\quad + (-1)^m \alpha^m \tau^m \Lambda_1 \dots \Lambda_m \end{aligned} \quad |6.24|$$

Dans le cas particulier $m = 2$, le schéma de A. A. Samarsky prend la forme particulièrement simple :

$$\begin{aligned} (E - \alpha \tau \Lambda_1) (E - \alpha \tau \Lambda_2) u^{n+1} \\ = [E + (1 - \alpha) \tau \Lambda_1] [E + (1 - \alpha) \tau \Lambda_2] u^n \end{aligned} \quad |6.25|$$

On construit de façon analogue le S. H. P. pour l'équation (6.2) dans lequel on posera pour simplifier $a_{11} = a_{22} = 1$ (cf. [63]).

D'où le schéma homogène :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2} &= \frac{\Lambda_{11} + \Lambda_{22}}{2} (u^{n+1} + u^{n-1}) \\ &+ 2 a_{12} \Lambda_{12} u^n - \frac{h^2}{12} \frac{u^{n+1} - 2 u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + \frac{h^2}{6} b \Lambda_1 \Lambda_2 u^n \end{aligned} \quad |6.26|$$

$$\text{avec : } \Lambda_{ii} = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h^2}, \quad \Lambda_{12} = \frac{\Delta_{-1} \Delta_{-2} + \Delta_1 \Delta_2}{2 h^2} \text{ pour } a_{12} > 0,$$

$$\Lambda_{12} = \frac{\Delta_{-1} \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_{-2}}{2 h^2} \text{ pour } a_{12} < 0$$

$$\text{et } b = 1 + 2 a_{12}^2 - 3 |a_{12}| \quad |6.27|$$

Le schéma factorisé a la forme :

$$A_1 A_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (1 - 2\alpha) \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} + \alpha \Lambda (u^n + u^{n-1}) + 4\alpha a_{12} \Lambda_{12} u^n + 2(1 - \alpha) \tau b \Lambda_1 \Lambda_2 u^n \quad |6.28$$

avec : $A_i = E - \alpha \tau \Lambda_{ii}$, $\alpha = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{6\tau}}$

6.3 Résolution du problème de Dirichlet à l'aide du S. H. P.

Les schémas étudiés dans les paragraphes précédents étaient des schémas d'intégration des équations (6.1) et (6.2) à haute précision et possédant la consistance totale et l'absolue stabilité. Par conséquent, ils sont pleinement applicables en tant que schémas itératifs à haute précision.

Pour les schémas itératifs, la précision d'intégration par rapport au *temps de relaxation* t est secondaire, alors que la précision d'approximation par rapport aux variables d'espace est essentielle. Par conséquent, dans le cas des schémas itératifs, il est possible d'utiliser des schémas à faible précision par rapport au temps, en exigeant seulement qu'ils satisfassent la condition de consistance totale et soient suffisamment précis par rapport aux variables d'espace.

Limitons-nous, pour simplifier, au cas $m = 2$.

Pour l'équation de Laplace : $\mathcal{L} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad |6.29$

le S. H. P. homogène a la forme : $\Omega u = \left(\Lambda + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) u = 0 \quad |6.30$

Suivant l'ouvrage de A. A. Samarsky et V. B. Andreïev [64], nous allons nous baser sur le schéma homogène absolument stable du premier ordre de précision par rapport à t suivant :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 u^n \quad |6.31$$

Le schéma (6.31) est identique à celui-ci :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + \tau \Lambda \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 u^n = \tau \Lambda \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Omega u^n \quad |6.32$$

ou $(E - \tau \Lambda) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n \quad |6.33$

Factorisant l'opérateur $E - \tau\Lambda$, nous obtenons le S. H. P. factorisé :

$$(E - \tau\Lambda_1)(E - \tau\Lambda_2) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n \quad |6.34|$$

possédant la consistance totale et la forte stabilité.

Des schémas itératifs à haute précision simples ont été obtenus par V. A. Enal'sky [67], basés sur les schémas de désintégration et à directions alternées.

Étudions le schéma de désintégration :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 \left(\alpha_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \beta_1 u^n \right) \quad |6.35|$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 \left(\alpha_2 u^{n+1} + \beta_2 u^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

avec les paramètres indéterminés $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$.

Le schéma en pas entiers a la forme :

$$(E - \alpha_1 \tau \Lambda_1)(E - \alpha_2 \tau \Lambda_2) u^{n+1} = (E + \beta_1 \tau \Lambda_1)(E + \beta_2 \tau \Lambda_2) u^n \quad |6.36|$$

Choisissons α_i et β_i de façon à satisfaire la condition de consistance totale. Mettons (6.36) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n \\ \Omega_1 &= \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_2 - \alpha_1 \alpha_2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2 \\ \Omega_2 &= \beta_1 \Lambda_1 + \beta_2 \Lambda_2 + \beta_1 \beta_2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2 \end{aligned} \quad |6.37|$$

La condition de consistance forte s'écrit :

$$\Omega_1 + \Omega_2 = k\Omega = k \left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) \quad |6.38|$$

Sous l'hypothèse d'un changement de norme du paramètre τ , on peut poser $k = 1$, et alors la condition (6.38) donne :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= \alpha_2 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2 &= \frac{1}{6r} = \theta \end{aligned} \quad |6.39|$$

En combinant les équations (6.39), on trouve :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \theta \quad |6.40|$$

Si l'on impose en plus la condition :

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1 - \theta}{2} \quad |6.41|$$

on obtient le schéma de A. A. Samarsky (6.25).

Dans l'ouvrage [68], V. A. Enalsky a proposé d'effectuer dans les schémas à pas fractionnaires une décomposition des opérateurs Λ_1 , Λ_2 , $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$. Nous obtenons alors le schéma suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \alpha \Lambda_1 u^n + \beta \Lambda_2 u^n + \gamma \tau \Lambda_1 \Lambda_2 u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_2 u^{n+1} + \alpha \Lambda_2 u^{n+\frac{1}{2}} + \beta \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \tau \Lambda_1 \Lambda_2 u^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} |6.42|$$

avec les coefficients indéterminés α , β , γ .

Le schéma en pas entiers a la forme :

$$\left. \begin{aligned} Au^{n+1} &= Bu^n \\ A &= (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) \\ B &= (E + \alpha \tau \Lambda_1 + \beta \tau \Lambda_2 + \gamma \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2)(E + \beta \tau \Lambda_1 + \alpha \tau \Lambda_2 + \gamma \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2) \end{aligned} \right\} |6.43|$$

Choisissons les coefficients α , β , γ de manière à ce que l'opérateur B-A soit divisible par l'opérateur :

$$\Omega = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2$$

La condition de divisibilité implique les conditions suivantes pour α , β , γ :

$$\frac{2\gamma + (\alpha - \beta)^2 - 1}{\alpha + \beta + 1} = \sigma; \quad \frac{\gamma^2}{\gamma(\alpha + \beta) - \alpha\beta\sigma} = \sigma; \quad \sigma = \frac{h^2}{6\tau} = \frac{1}{6r} \quad |6.44|$$

$$\text{Si } \alpha = \sigma, \quad \beta = 1 + \sigma, \quad \gamma = \alpha\beta \quad |6.45|$$

alors les conditions (6.44) sont vérifiées et l'on obtient le schéma proposé par V. A. Enalsky [68].

7. Équations intégrro-différentielles, intégrales et algébriques

7.1 Équation de la cinétique

Pour l'équation de la cinétique (vitesse constante, diffusion isotrope) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m-1} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \sigma \varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int \varphi(x, u, t) \, d u + S(x, u, t) \quad |7.1|$$

l'ouvrage de G. I. Martchouk et de l'auteur [69] indique le schéma (désintégration incomplète) :

$$\frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_1 \left(\alpha \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \beta \varphi^n \right) + \bar{S} \quad |7.2 \text{ a}|$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 \left(\alpha \varphi^{n+1} + \beta \varphi^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad |7.2 \text{ b}|$$

où Λ_1 , Λ_2 , \bar{S} approchent respectivement $-\sigma E + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int d u$, $-\sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$

et S , et où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta = 1$.

Le schéma (7.2) se réalise de la façon suivante :

Sommant (7.2 a) par rapport à u_k , on obtient :

$$\frac{\varphi_0^{n+\frac{1}{2}} - \varphi_0^n}{\tau} = -\sigma_c \left(\alpha \varphi_0^{n+\frac{1}{2}} + \beta \varphi_0^n \right) + \bar{S}_0 \quad |7.3|$$

$$\text{où : } \varphi_0 = \sum \varphi \Delta u, \quad \bar{S}_0 = \sum \bar{S} \Delta u, \quad \sigma_c = \sigma - \sigma_s \quad |7.3'|$$

la somme de (7.3') étant prise par rapport aux indices du maillage.

De l'équation (7.3) on peut tirer $\varphi_0^{n+\frac{1}{2}}$ de façon explicite :

$$\varphi_0^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \beta \tau \sigma_c}{1 + \alpha \tau \sigma_c} \varphi_0^n + \frac{\bar{S}_0}{1 + \alpha \tau \sigma_c} \tau$$

Après quoi on intègre l'équation (7.2 a), que l'on peut recopier sous la forme :

$$\frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^n}{\tau} + \sigma \left(\alpha \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \beta \varphi^n \right) = \frac{\sigma_s}{4\pi} \left(\alpha \varphi_0^{n+\frac{1}{2}} + \beta \varphi_0^n \right) + \bar{S} \quad |7.2 c|$$

Pour simplifier la résolution du second pas fractionnaire, on applique le schéma de désintégration totale :

$$\frac{\varphi^{n+\frac{1}{m}} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_2 \left(\alpha \varphi^{n+\frac{1}{m}} + \beta \varphi^n \right) + \bar{S} \quad |7.4 a|$$

$$\frac{\varphi^{n+\frac{i+1}{m}} - \varphi^{n+\frac{i}{m}}}{\tau} = \Lambda_{2i} \left(\alpha \varphi^{n+\frac{i+1}{m}} + \beta \varphi^{n+\frac{i}{m}} \right), \quad i = 1, \dots, m-1 \quad |7.4 b|$$

où $\Lambda_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \Lambda_{2i}$ et où Λ_{2i} est l'approximation des opérateurs unidimensionnels

$u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, m-1$; $(m-1)$ est la dimension de l'espace.

Limitons-nous à l'analyse des conditions aux limites.

On pose pour l'équation (7.1) le problème aux limites mixte :

$$\varphi(x, u, 0) = \varphi_0(x, u), \quad (x, u) \in G \quad |7.5|$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x, u, t) = 0 \\ \sum_{k=1}^{m-1} u_k \cdot n_k \leq 0, \end{array} \right\} (x, u, t) \in \Gamma \quad |7.6|$$

dans le domaine cylindrique $\Pi = G \times H$ de base G , de frontière latérale $\Gamma = \gamma \times H$, $\gamma = \bar{G} - G$, de normale $n = \{n_k\}$.

Si Π est un parallépipède, alors la réalisation des conditions aux limites dans le schéma à désintégration totale est évidente : à chaque i^{eme} pas fractionnaire de (7.4 b) on applique le schéma à pas courant le long de x_i dans la direction de la limite éclairée $\left(\sum_{k=1}^{m-1} u_k n_k \leq 0 \right)$.

Dans le cas d'un domaine quelconque, Π_0 est considéré comme inclus dans un parallépipède Π et on prolonge la définition de φ dans le domaine $\Pi - \Pi_0$.

Dans le cas à deux dimensions, le prolongement de φ s'effectue de la manière suivante (cf. fig. 7.1). Pour l'exécution du premier pas fractionnaire ($i = 1$) de (7.4 b) on pose $\varphi^{n+\frac{2}{3}} = 0$ sur AB, $\varphi^{n+\frac{1}{3}} = 0$ dans le domaine FBK et KAE.

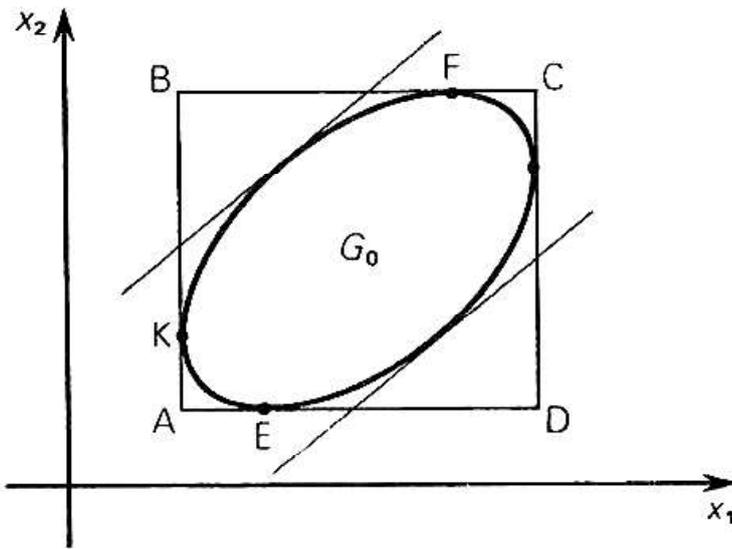


FIGURE 7. 1 Prolongement de φ dans $\Pi-\Pi_0$ dans le cas à deux dimensions.

Le deuxième pas fractionnaire ($i = 2$) s'effectue avec $\varphi^{n+\frac{2}{3}}$ comme données initiales obtenues au premier pas fractionnaire et avec les conditions aux limites $\varphi = \varphi^{n+1}$ sur AD.

Une étude plus approfondie de la convergence des schémas aux différences est effectuée dans les ouvrages [70, 71].

Remarquons qu'une application analogue de la sommation de φ pour l'obtention de l'équation aux différences, conservant au premier échelon seulement φ_0 , est donnée par V. Ja. Goldin [98].

7.2 Équations algébriques

L'ouvrage de A. A. Samarsky [50] propose un algorithme de résolution des systèmes d'équations différentielles :

$$\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j = f_i(t) \right\} \quad i, j = 1, \dots, m \quad |7.7|$$

Le schéma explicite d'intégration de (7.7) est de premier ordre de précision et nécessite $O(m^2)$ opérations.

Le schéma implicite habituel :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = f^{n+1}, \quad u = \{u_i\}, \quad f = \{f_i\}, \quad A = \{a_{ij}\} \quad |7.8|$$

est du second ordre de précision et nécessite $O(m^3)$ opérations. Dans [50], on propose un schéma analogue au schéma des directions alternées :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau/2} + A_1 u^{n+\frac{1}{2}} + A_2 u^n &= f^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + A_1 u^{n+\frac{1}{2}} + A_2 u^{n+1} &= f^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad |7.9|$$

où $A = A_1 + A_2$, $A_1 = (a_{ij}^-)$ matrice triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0$ si $j > i$)

$$A_2 = (a_{ij}^+) \text{ matrice triangulaire supérieure } (a_{ij} = 0 \text{ si } j \leq i) \quad |7.10|$$

et $a_{ii}^- + a_{ii}^+ = a_{ii}$.

Si les matrices triangulaires A_1, A_2 sont définies positives, c'est-à-dire si

$$(A_\alpha u, u) \geq C \|u\|^2, \quad C > 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad |7.11|$$

alors le schéma (7.9) est stable.

Le schéma (7.9) peut être étudié de façon identique à un schéma itératif.

Pour le coefficient ϱ d'amortissement de la progression de l'erreur, l'estimation

$$\text{suivante est vérifiée (cf. [50]) : } \varrho \leq \bar{\varrho} = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{2 C \tau}{1 + d^2 \tau^2} \quad |7.12|$$

avec $d = \max(\|A_1\|, \|A_2\|)$.

Il est facile de voir que l'on peut appliquer un schéma analogue au schéma de désintégration.

La méthode à pas fractionnaires peut être appliquée avec succès aux problèmes d'hydrodynamique pour la construction de schémas économiques d'intégration et de schémas itératifs.

8.1 Contournement équipotentiel

Étudions l'écoulement équipotentiel plan d'un liquide incompressible autour d'un contour γ ayant l'axe de symétrie $x_2 = 0$ (cf. fig. 8.1) :

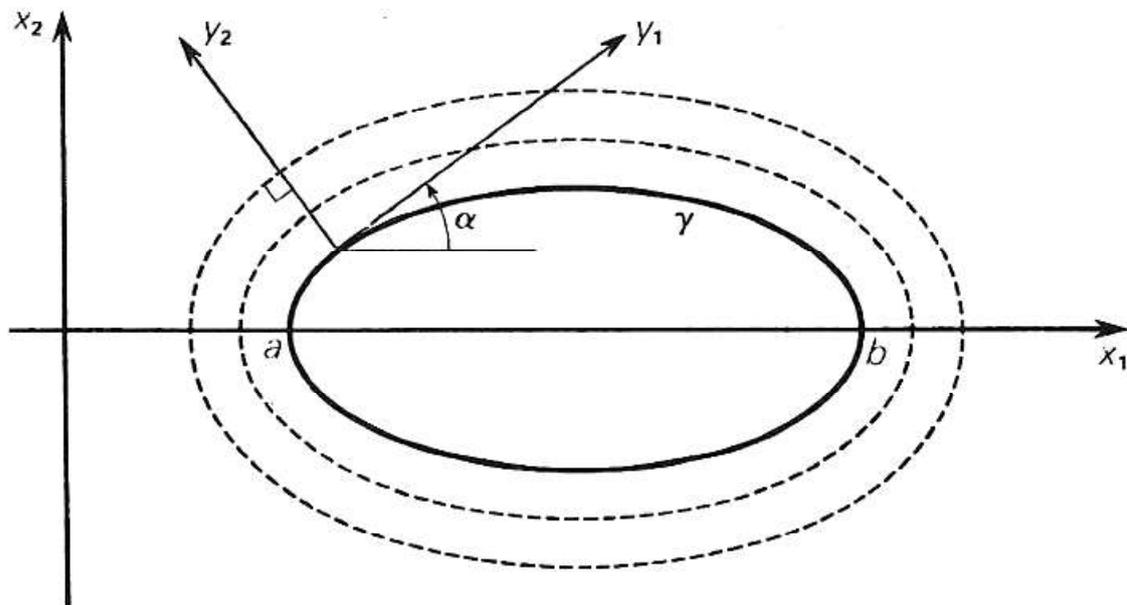


FIGURE 8.1. Maillage orthogonal des équidistantes et des normales.

Nous considérons que l'écoulement à l'infini est homogène et que le vecteur vitesse $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$ à l'infini est porté par l'axe x_1 , c'est-à-dire :

quand $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$, on a : $u_1 \rightarrow u_{10}$ et $u_2 \rightarrow 0$ |8.1|

Pour la fonction courant ψ nous obtenons le problème aux limites :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0 \quad |8.2|$$

$$\psi(x_1, 0) = 0, \quad -\infty < x_1 \leq a, \quad b \leq x_1 < +\infty \quad |8.3 a|$$

$$\psi(x_1, x_2) = 0 \text{ pour } (x_1, x_2) \in \gamma \quad |8.3 b|$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -u_{10}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0 \text{ pour } x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty \quad |8.3 c|$$

On peut résoudre le problème (8.2), (8.3) en coordonnées cartésiennes, mais dans ce cas le maillage au voisinage de la frontière sera non uniforme, ce qui diminue la précision du calcul.

Introduisons le système de coordonnées orthogonales y_1, y_2 où y_1 est la longueur de l'arc du contour γ et y_2 la distance jusqu'à γ comptée sur la normale. y_1, y_2 sont liés à x_1, x_2 par les relations :

$$x_1 = x_1(y_1) - y_2 \sin[\alpha(y_1)]$$

$$x_2 = x_2(y_1) - y_2 \cos[\alpha(y_1)]$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 = (1 - y_2 k)^2 dy_1^2 + dy_2^2$$

ici $\begin{cases} x_1 = x_1(y_1) \\ x_2 = x_2(y_1) \end{cases}$ est la donnée paramétrique du contour γ et α est l'angle de la tangente à γ avec Ox_1 , donné en fonction de y_1 .

On a $\cos \alpha = \frac{dx_1}{dy_1}$ et $k(y_1) = \frac{d\alpha}{dy_1}$ est la courbure de contour.

L'équation (8.2) se met sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_2} \right) = 0 \quad |8.4|$$

$$\text{où } H_1 = (1 - ky_2)^2, \quad H_2 = 1 \quad |8.5|$$

Le domaine d'intégration est la bande de longueur infinie :

$$0 \leq y_1 \leq l, \quad 0 \leq y_2 < \infty \quad |8.6|$$

où l est le demi-périmètre de γ .

Les conditions aux limites se formulent dans le plan y_1, y_2 de la façon suivante :

$$\psi(0, y_2) = 0, \quad \psi(l, y_2) = 0 \quad |8.7 a|$$

$$\psi(y_1, 0) = 0, \quad 0 \leq y_1 \leq l \quad |8.7 b|$$

$$\psi(y_1, a) = -u_{10}x_2 = u_{10} \{ x_2(y_1) + a \cos[\alpha(y_1)] \} \quad |8.7 c|$$

Pour $a \rightarrow \infty$, nous obtenons la représentation exacte des conditions aux limites si nous remplaçons la condition (8.7 c) par la condition (8.3 c), exprimant (8.3 c) avec les coordonnées y_1, y_2 .

Le problème de Dirichlet (8.4), (8.7) dans le rectangle $0 \leq y \leq l, 0 \leq y_2 \leq a$ se résout de la manière connue (cf. ch. 4).

Remarquons que pour accélérer la convergence il faut changer l'échelle de l'axe y_2 en introduisant une nouvelle variable $Y_2 = f(y_2)$.

De plus, pour l'accélération de la convergence, il est commode d'introduire un multiplicateur de relaxation $F(y_1, y_2, t)$ de manière à résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation non-stationnaire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F(y_1, y_2, t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) \right] \quad |8.8|$$

Un algorithme semblable fut réalisé sous forme de programme tenant compte également de la possibilité d'avoir une symétrie axiale.

8.2 Écoulement équipotentiel d'un liquide incompressible pesant avec une frontière libre (problème du déversoir)

Examinons l'amasement du flot homogène à l'infini sur une inégalité du fond (cf. fig. 8.2).

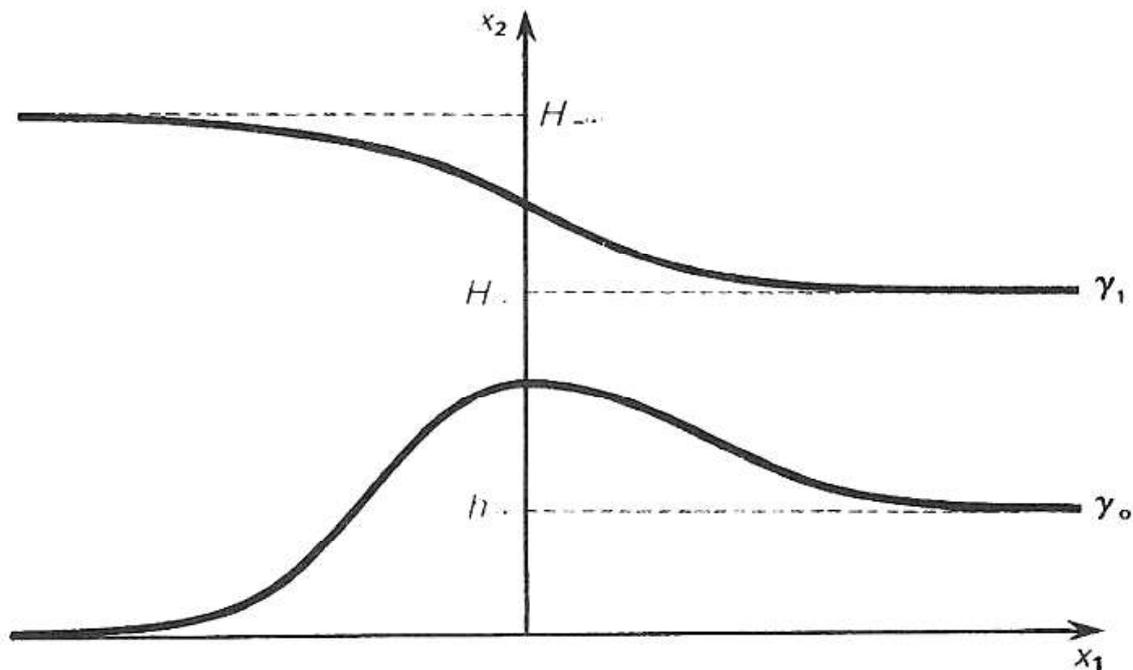


FIGURE 8.2. Amasement du flot sur une inégalité du fond.

Nous allons considérer que la courbe du fond est donnée par l'équation :

$$x_2 = f(x_1) \quad |8.9|$$

où $f(x_1)$ satisfait aux conditions :

$$f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = h_\infty \quad |8.10|$$

Comme précédemment, le mouvement du liquide est soumis à l'équation (8.2). Dans le plan x_1, x_2 , les conditions aux limites ont la forme :

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = u_{-\infty}, \quad u_2 = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x_2 \leq H_{-\infty} \quad \text{et } x_1 = -\infty \quad |8.11 \text{ a}|$$

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = u_\infty, \quad u_2 = 0 \quad \text{pour } h_\infty \leq x_2 \leq H_\infty \quad \text{et } x_1 = +\infty, \quad \psi = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_0 \quad |8.11 \text{ b}|$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] + p_0 = -gx_2 + c_1, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1 \quad |8.11 \text{ c}|$$

$$\psi = C^{te} = c_2, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1 \quad |8.11 \text{ d}|$$

Ici $H_{-\infty}$ est une grandeur donnée, p_0 est la pression sur la frontière supérieure (libre). La condition (8.11 d) indique que la surface libre dans l'écoulement stationnaire est, ainsi que le fond, une ligne de courant (ψ constant) et la condition (8.11 c) traduit la loi de Bernoulli.

La surface libre est indéterminée, et doit être choisie de manière à ce que les conditions (8.11 c) et (8.11 d) soient compatibles.

Les constantes c_1 et c_2 se déterminent à l'aide des conditions suivantes :

$$c_2 = u_{-\infty} H_{-\infty} \quad |8.12|$$

$$c_1 = \frac{1}{2} u_{-\infty}^2 + p_0 + gH_{-\infty} \quad |8.13|$$

Enfin, la hauteur limite H_∞ et la vitesse u_∞ se déterminent à l'aide de la loi de conservation de la masse et de l'impulsion (loi de Bernoulli) :

$$u_{-\infty} H_{-\infty} = u_\infty (H_\infty - h_\infty) \quad |8.14|$$

$$c_1 - p_0 = \frac{1}{2} u_{+\infty}^2 + gH_\infty \quad |8.15|$$

Pour la résolution des problèmes compliqués non linéaires (8.2), (8.3), nous passons aux nouvelles variables indépendantes x_1 et ψ , prenant x_2 comme fonction inconnue. A la place de l'équation (8.2), nous obtenons une équation elliptique quasi linéaire.

Dans la suite nous poserons pour simplifier $x = x_1$, $z = x_2$. Alors l'équation en z a la forme :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}{\frac{\partial z}{\partial \psi}} \right] = 0 \quad |8.16|$$

ou encore :

$$\mathfrak{L}z = z_\psi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 z_x z_\psi \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \psi} + (1 + z_x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = 0 \quad |8.17|$$

Avec les variables x et ψ , le domaine d'intégration devient rectangulaire. Les conditions aux limites (8.11) deviennent (cf. fig. 8.3) :

$$z = -\frac{\psi}{u_{-\infty}}, \quad 0 \leq \psi \leq c_2, \quad x = -c \quad |8.18 a|$$

$$z = \frac{\psi}{u_\infty} + h_\infty, \quad 0 \leq \psi \leq c_2, \quad x = +c \quad |8.18 b|$$

$$z = f(x), \quad -c \leq x \leq c, \quad \psi = 0 \quad |8.18 c|$$

$$z_x^2 + (gz - c_1 + p_0) z_\psi^2 + 1 = 0, \quad -c \leq x \leq c, \quad \psi = c_2 \quad |8.18 d|$$

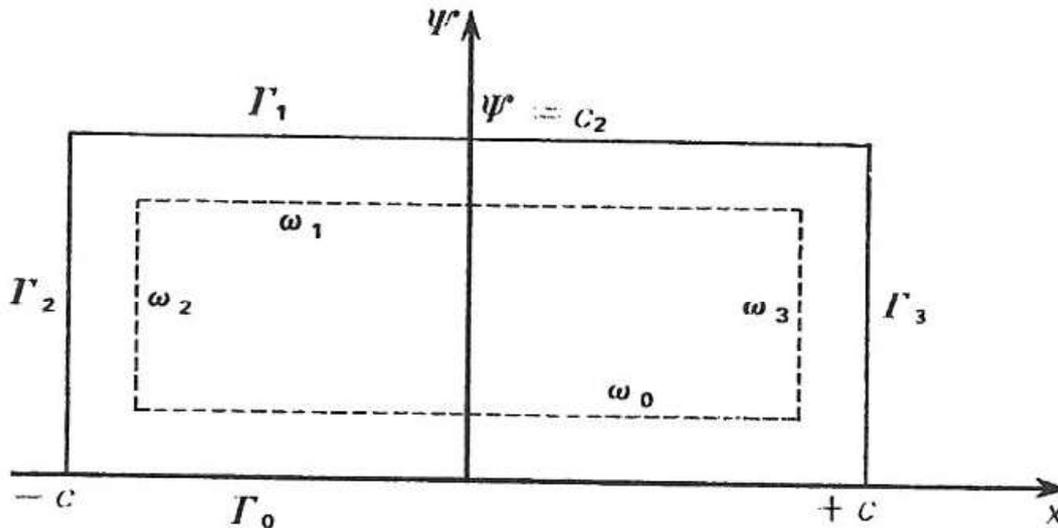


FIGURE 8.3. Domaine d'intégration dans le plan x, ψ .

Pour $c \rightarrow \infty$, nous obtenons une réalisation exacte du problème. Sur les droites $\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont données les significations de z (conditions 8.18 a, b, c), sur la droite Γ_1 est donnée la condition non linéaire (8.18 d).

Pour la réalisation du problème non linéaire obtenu, le processus d'itération est compliqué. Pour cela, comme d'habitude, l'équation (8.17) est mise en correspondance avec l'équation non stationnaire :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \mathfrak{L}z \quad |8.19|$$

qui s'intègre à l'aide d'un schéma à pas fractionnaires quelconque.

Dans le schéma itératif correspondant les coefficients de l'opérateur \mathfrak{L} sont pris à l'itération précédente. Par exemple, le schéma itératif de désintégration a la forme :

$$\begin{aligned} \frac{z^{n+\frac{1}{2}} - z^n}{\tau} &= (z_\psi^2)^n \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} z^{n+\frac{1}{2}} - (z_x z_\psi)^n \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2 h_1} \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2 h_2} z^n \\ \frac{z^{n+1} - z^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= - (z_x z_\psi)^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2 h_1} \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2 h_2} z^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + (1 + z_x^2)^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} z^{n+1} \end{aligned} \quad |8.20|$$

On linéarise la condition aux limites (8.18 d) de façon analogue :

$$(z_x)_k z^{n+1} + [(gz - c_1 + p_0) z_\psi]_k z^{n+} + 1 = 0 \quad |8.21|$$

où k est l'indice d'itération sur la frontière.

Désignons par $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ les droites du maillage proches de la frontière $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

Soit sur Γ_1 la donnée, considérée comme itération n^e , de z .

Alors nous obtenons pour z un problème aux limites du premier ordre et, avec les conditions aux limites données, on effectue un ou plusieurs cycles d'itérations avec le schéma (8.20). Après quoi les conditions aux limites sur Γ_1 se recalculent à l'aide d'un cycle d'itérations du schéma :

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} = (z_x)_k \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2 h_1} z_{k+1} + [(gz - c_1 + p_0) z_\psi]_k \frac{z_{k+1} - z^n(\omega_1)}{h_2} + 1 \quad |8.22|$$

où $z^n(\omega_1)$ est pris sur ω_1 à la dernière itération de la résolution du problème de Dirichlet.

Alternant ainsi les cycles d'itérations, nous obtenons un processus itératif convergent. La description de l'algorithme a été proposée et réalisée sous forme de programme par S. N. Antontsev, O. F. Vassiliev, B. G. Kouznetsov et l'auteur (cf. [73]).

8.3 Écoulement d'un liquide visqueux

Dans le cas à deux dimensions, l'écoulement d'un liquide visqueux et incompressible est décrit par les équations :

$$\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial P}{\partial x_1} = \mu \Delta u_1 \quad |8.23 a|$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial P}{\partial x_2} = \mu \Delta u_2 \quad |8.23 b|$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0 \quad |8.23 c|$$

où μ est le coefficient de viscosité.

Pour un liquide incompressible, nous avons :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0 \quad |8.24|$$

et l'équation (8.23 c) prend la forme :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad |8.25|$$

Dans ce paragraphe nous nous limiterons au cas particulier d'un liquide incompressible et d'un écoulement stationnaire.

Ce cas est décrit par les équations :

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} = \nu \Delta u_1 \quad |8.26|$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} = \nu \Delta u_2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est le coefficient cinématique de viscosité.

Posons les conditions aux limites correspondant à l'écoulement symétrique : (cf. fig. 8.4 et 8.5, page suivante).

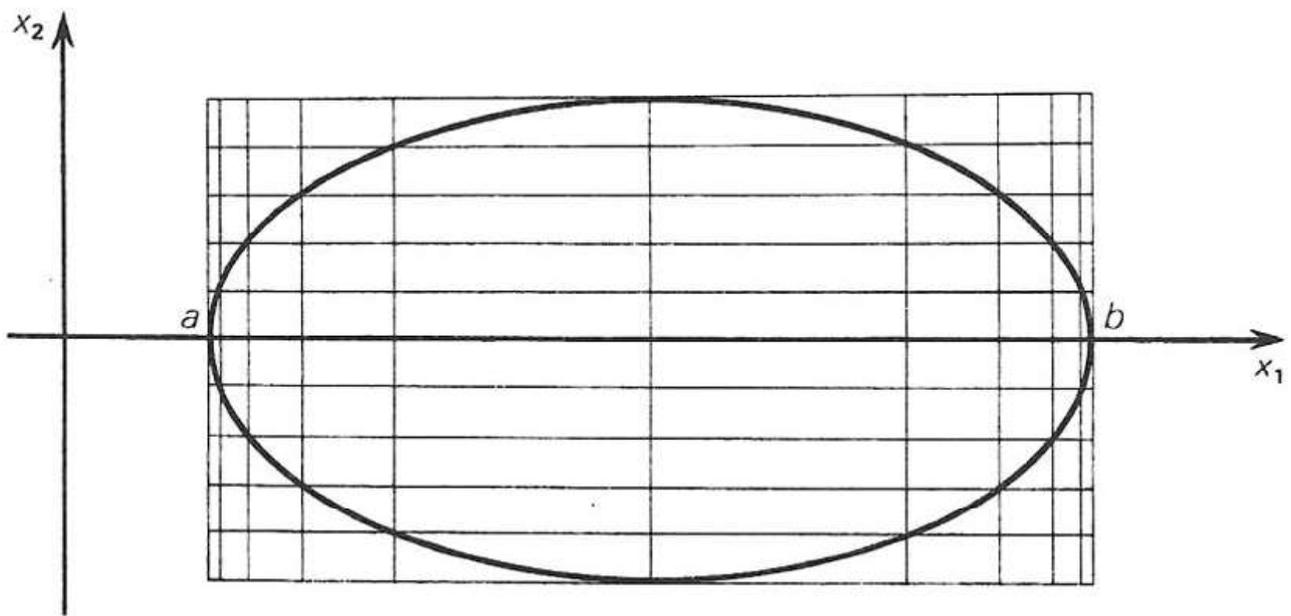


FIGURE 8.4. Maillage adapté au contour.

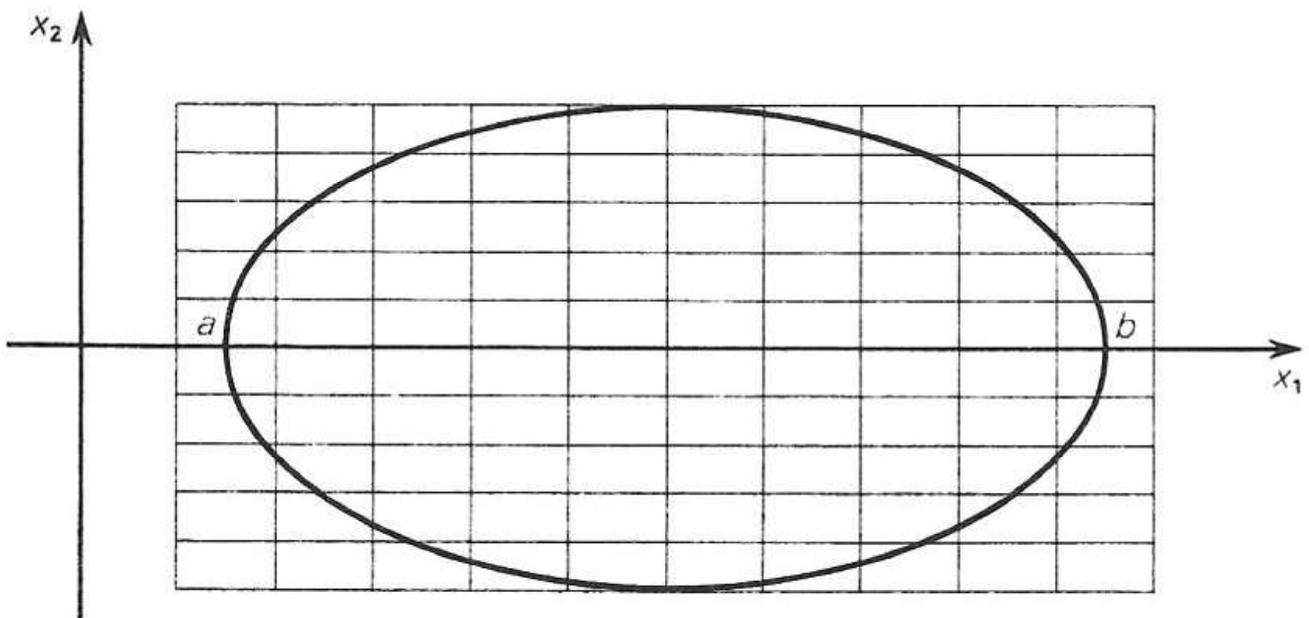


FIGURE 8.5. Maillage non adapté au contour

Pour la construction d'un processus de relaxation, posons en correspondance à l'équation (8.18) un certain système non-stationnaire.

Un modèle de relaxation naturel est le modèle du liquide faiblement compressible. Dans ce cas nous allons nous baser sur le système (8.23). Conservant les équations (8.23 a), (8.23 b), posons :

$$P = a^2 \rho^k, \quad a \text{ et } k \text{ étant des constantes.}$$

|8.27|

et recopions l'équation (8.23 c) sous la forme :

$$\varepsilon \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) + P \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{k} \quad |8.28|$$

Considérant k suffisamment grand, nous obtenons une équation avec un petit paramètre ε .

Dans ce cas, le système non-stationnaire a la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= \nu \Delta u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial x_2} &= \nu \Delta u_2 \end{aligned} \quad |8.29|$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) + P \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0$$

Dans la suite, nous poserons $\varrho = 1$.

Aux équations (8.29) on peut appliquer le schéma de désintégration en coordonnées x_1, x_2 approchant le système :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_1} &= \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon u_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + P \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \right] \quad |8.30|$$

au premier demi-pas $t \in \left[n\tau, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right]$; et approchant le système :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon u_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} + P \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right] \quad |8.31|$$

au second demi-pas $t \in \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau, (n + 1) \tau \right]$.

On peut utiliser un autre système d'évolution. Il a la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_1} &= v \Delta u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2} &= v \Delta u_2 \end{aligned} \quad |8.32|$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad |8.33|$$

avec $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$ et $q_i = P + \frac{u_i^2}{2}$, $i = 1, 2$

Il lui correspond le système de désintégration :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} &= v \frac{\partial^2 u_1}{x_1^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= v \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad |8.34|$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} &= v \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad |8.35|$$

Écrivons le schéma de désintégration correspondant :

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+\frac{1}{2}} - u_1^n}{\tau} + \frac{\Delta_1}{h_1} \left(\alpha q_1^{n+\frac{1}{2}} + \beta q_1^n \right) &= v \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \left(\alpha u_1^{n+\frac{1}{2}} + \beta u_1^n \right) \\ \frac{u_2^{n+\frac{1}{2}} - u_2^n}{\tau} + \left(\alpha u_1^n + \beta u_1^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\Delta}{h_1} \left(\alpha u_2^{n+\frac{1}{2}} + \beta u_2^n \right) &= v \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \left(\alpha u_2^{n+\frac{1}{2}} + \beta u_2^n \right) \\ \frac{q_1^{n+\frac{1}{2}} - q_1^n}{\tau} + \frac{\Delta_{-1}}{h_1} \left(\alpha u_1^{n+\frac{1}{2}} + \beta u_1^n \right) &= 0 \end{aligned} \quad |8.36|$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \Delta = \Delta_{-1}, \quad \left(\alpha u_1^n + \beta u_1^{n+\frac{1}{2}} \right) &\geq 0 \\ \Delta = \Delta_{+1}, \quad \left(\alpha u_1^n + \beta u_1^{n+\frac{1}{2}} \right) &< 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1} - u_1^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \left(\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\Delta}{h_2} \left(\alpha u_1^{n+1} + \beta u_1^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ = v \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \left(\alpha u_1^{n+1} + \beta u_1^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad |8.37|$$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_2^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{\Delta_2}{h_2} \left(\alpha q_2^{n+1} + \beta q_2^{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \left(\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\frac{q_2^{n+1} - q_2^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{\Delta_{-2}}{h_2} \left(\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\text{avec} \quad \Delta = \Delta_{-2}, \quad \left(\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+\frac{1}{2}} \right) \geq 0$$

$$\Delta = \Delta_{+2}, \quad \left(\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+\frac{1}{2}} \right) < 0$$

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Δ peut être également une différence centrale.

Il est facile de voir que les schémas implicites (8.36), (8.37) reviennent à une récurrence tridiagonale le long des lignes du maillage (cf. fig. 8.4 et 8.5). Le maillage peut être *adapté* au contour (les lignes du maillage se croisent sur le contour) (cf. fig. 8.4) ou *non adapté* (cf. fig. 8.5). Dans le dernier cas, on effectue une interpolation complémentaire. Dans le calcul pratique, la condition pour $x_1 = \mp c$ se pose pour $x_1 = \mp c$ avec c suffisamment grand. Un tel algorithme de calcul a été étudié par V. G. Kouznetsov et l'auteur [74] et réalisé sous forme de programme par N. A. Vladimirov.

8.4 Méthode de l'écoulement dans les canaux

La résolution de nombreux problèmes d'hydrodynamique conduit à un maillage curviligne. La méthode de l'écoulement dans les canaux consiste à transformer simultanément les coordonnées et les composantes de la vitesse de façon à ce que chaque composante caractérise la vitesse d'écoulement dans le canal de coordonnées correspondant (cf. fig. 8.6, page suivante).

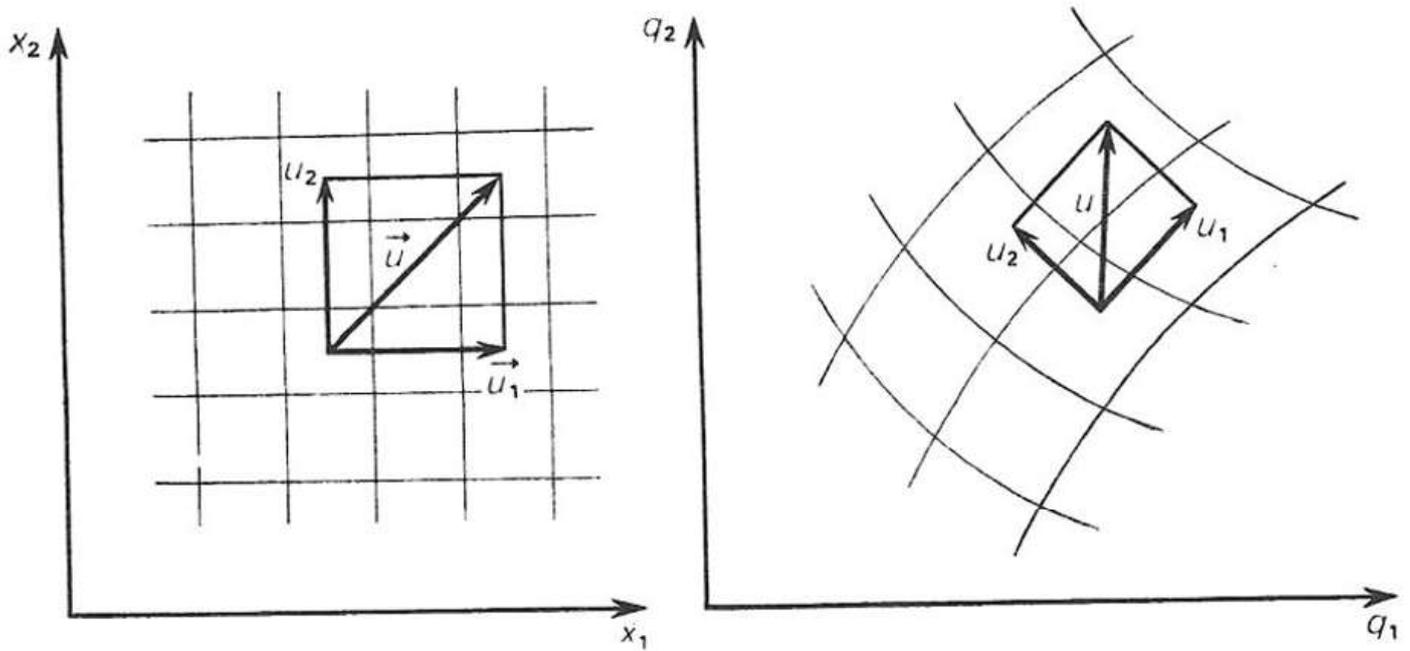


FIGURE 8.6 Transformation des coordonnées et des composantes de la vitesse

Dans ce but, il faut utiliser une écriture tensorielle des équations de l'hydrodynamique.

Soit :

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_a u^a \frac{\partial u^i}{\partial x^a} \right) + \frac{\partial P}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_a u^a \frac{\partial \rho}{\partial x^a} + \rho \sum_a \frac{\partial u^a}{\partial x^a} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_a u^a \frac{\partial S}{\partial x^a} &= 0, \quad P = P(\rho, S) \end{aligned} \right\} \quad |8.38|$$

un système d'équations de la dynamique des gaz en coordonnées cartésiennes orthogonales. Nous considérons u^i comme une composante contravariante du vecteur vitesse \vec{u} et $\frac{\partial P}{\partial x^i}$ comme le gradient contravariant de P .

Soient les fonctions : $q^i = q^i(x^1, x^2, \dots, x^m, t), \quad i = 1 \dots m.$ |8.39|

qui donnent le passage des coordonnées x^i aux coordonnées curvilignes q^i au temps t donné. Introduisant, comme d'habitude, les matrices de passage :

$$a_j^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^j}, \quad A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad \sum_a a_a^i A_j^a = \delta_j^i \quad |8.40|$$

nous obtenons la loi de passage suivante :

$$U^i = \sum_a a_a^i u^a \quad |8.41|$$

où U^i sont les composantes du vecteur vitesse correspondantes aux coordonnées q^i .
Il en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^i}{\partial t} &= \sum_a \left(a_a^i \frac{\partial u^a}{\partial t} + \frac{\partial a_a^i}{\partial t} u^a \right) = \sum_a a_a^i \frac{\partial u^a}{\partial t} \\ &+ \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial a_{\alpha\beta}^i}{\partial t} A_{\alpha}^{\beta} U^{\alpha} = \sum_a a_a^i \frac{\partial u^a}{\partial t} + \sum_a b_a^i U^a \end{aligned} \quad [8.42]$$

$$\text{avec } b_a^i = \sum_{\beta} \frac{\partial a_{\alpha\beta}^i}{\partial t} A_{\alpha}^{\beta}$$

$$\text{Par conséquent, les grandeurs : } \frac{\partial U^i}{\partial t} - \sum_a b_a^i U^a \quad [8.43]$$

se transforment comme les composantes d'un vecteur contravariant, et après passage aux coordonnées q^i d'après la formule (8.39) et aux composantes U^i d'après les formules (8.42), l'équation (8.38) prend la forme :

$$\begin{aligned} \varrho \left(\frac{\partial U^i}{\partial t} + \sum_a U^a \frac{\partial U^i}{\partial q^a} \right) + \sum_a g^{ia} \frac{\partial P}{\partial q^a} &= \Phi^i \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_a U^a \frac{\partial \varrho}{\partial q^a} + \varrho \sum_a \frac{\partial U^a}{\partial q^a} &= \Psi \end{aligned} \quad [8.44]$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_a U^a \frac{\partial S}{\partial q^a} = 0, \quad i, a = 1, \dots, m$$

$$\text{avec : } \Phi^i = -\varrho \left[\sum_a b_a^i U^a + \sum_{\alpha, \beta} U^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^i U^{\alpha} \right]$$

$$\Psi = -\varrho \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} u^{\beta} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^i = \sum_a a^i_{\gamma} \frac{\partial A_{\alpha}^{\gamma}}{\partial q^{\beta}}, \quad i, \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m \quad [8.45]$$

Dans le cas particulier $m = 2$, examinons le système de désintégration :

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{\partial U^1}{\partial t} + \varrho U^1 \frac{\partial U^1}{\partial q^1} + g^{11} \frac{\partial P}{\partial q^1} = \frac{1}{2} \Phi^1 \quad [8.46 \text{ a}]$$

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{\partial U^2}{\partial t} + \varrho U^1 \frac{\partial U^2}{\partial q^1} + g^{21} \frac{\partial P}{\partial q^1} = \frac{1}{2} \Phi^2 \quad [8.46 \text{ b}]$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + U^1 \frac{\partial \varrho}{\partial q^1} + \varrho \frac{\partial U^1}{\partial q^1} = \frac{1}{2} \Psi \quad [8.46 \text{ c}]$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} + U^1 \frac{\partial S}{\partial q^1} = 0 \quad [8.46 \text{ d}]$$

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{\partial U^1}{\partial t} + \varrho U^2 \frac{\partial U^1}{\partial q^2} + g^{12} \frac{\partial P}{\partial q^2} = \frac{1}{2} \Phi^1 \quad [8.47 \text{ a}]$$

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{\partial U^2}{\partial t} + \varrho U^2 \frac{\partial U^2}{\partial q^2} + g^{22} \frac{\partial P}{\partial q^2} = \frac{1}{2} \Phi^2 \quad [8.47 \text{ b}]$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + U^2 \frac{\partial \varrho}{\partial q^2} + \varrho \frac{\partial U^2}{\partial q^2} = \frac{1}{2} \Psi \quad |8.47 \text{ c}|$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} + U^2 \frac{\partial S}{\partial q^2} = 0 \quad |8.47 \text{ d}|$$

On approche le système (8.46) par un certain schéma aux différences dans l'intervalle $t \in \left[n \tau, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right]$ et le système (8.47) — dans l'intervalle $\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau, (n + 1) \tau \right]$. Chacun des systèmes (8.46) et (8.47) a la structure de système unidimensionnel. Plus précisément, dans le système (8.46) les équations (8.46 a, c, d) sont analogues aux équations unidimensionnelles de la dynamique des gaz et peuvent être résolues à l'aide d'un schéma implicite basé sur une récurrence vectorielle. Après quoi, l'équation (8.46 b) se résout par la méthode du calcul courant sur U^2 . On applique une procédure analogue au système (8.47).

La méthode de calcul indiquée est commode dans le cas où dans le système mobile de coordonnées la frontière de contact est une ligne de coordonnées¹. Alors la récurrence sur le canal traversant la frontière est possible puisque les composantes transversales contravariantes de la vitesse sont continues à la traversée de la frontière (cf. fig. 8.7).

Ceci découle du fait que la discontinuité du vecteur vitesse $U^+ - U^-$ sur la frontière de contact est parallèle à cette frontière.

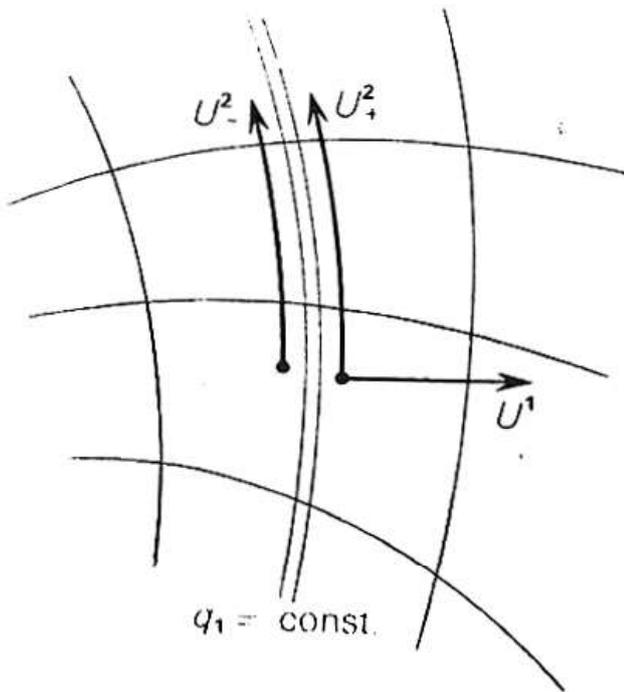


FIGURE 8.7. U^1 est continue dans le passage à travers la frontière de contact et U^2 est discontinue.

1. Des maillages mobiles de ce type, incluant la frontière de contact comme ligne de coordonnées, ont été appliqués par S. K. GODOUNOV.

8.5 Méthode prédicteur-correcteur (méthode des correcteurs)

La méthode prédicteur-correcteur peut être considérée comme une des multiples formes de la méthode à pas fractionnaires, bien qu'elle ait été appliquée antérieurement et indépendamment à des problèmes divers.

Nous nous sommes persuadés plus haut que le prédicteur-correcteur peut être appliqué pour la construction de schémas à corrections d'approximation (*cf.* ch. 2). Dans le cas des équations non-linéaires, il peut être utilisé pour la reconstruction de schémas conservatifs (*cf.* ch. 1). Si l'utilisation du prédicteur-correcteur pour les équations différentielles ordinaires est connue depuis longtemps, son utilisation pour les équations non-linéaires a été proposée récemment dans les travaux de Douglas [75], S. K. Godounov, K. A. Semendaëv [76], S. K. Godounov [34], I. K. Iachev et l'auteur [35].

L'idée générale du prédicteur-correcteur en application aux équations de la dynamique des gaz peut être présentée sous la forme suivante. Soit :

$$\oint u \, dx - v(u) \, dt = \iint f \, dx \, dt \quad |8.48|$$

un système de lois de conservation, écrit sous la forme vectorielle :

$$u = \{ u_1, u_2, \dots, u_m \}, \quad v = \{ v_1, \dots, v_m \}, \quad f = \{ f_1, \dots, f_m \}$$

Au système (8.48) correspond le système conservatif hyperbolique et quasi linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v(u)}{\partial x} = f(u) \quad |8.49|$$

Choissant un maillage rectangulaire, approchons la relation (8.49) par le schéma aux différences (*cf.* fig. 8.8) :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{v_{i+1}^* - v_{i-1}^*}{2h} = f(u_i^{**}) \quad |8.50|$$

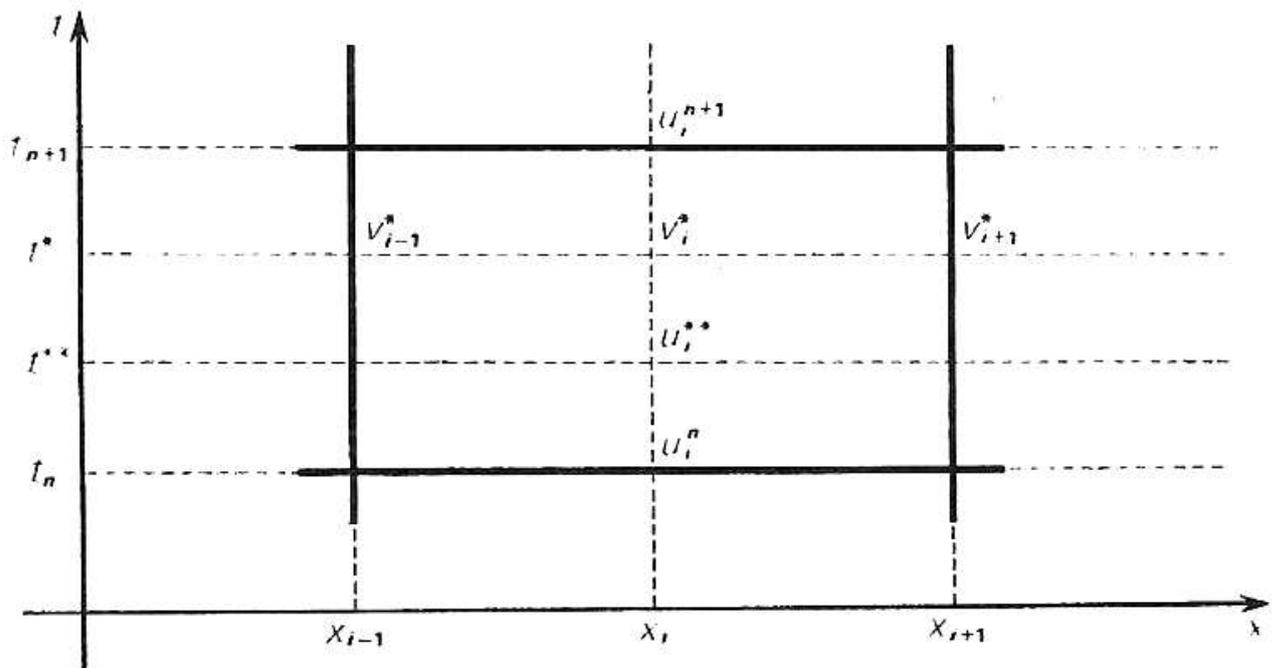


FIGURE 8.8. Répartition des grandeurs u_i^n , v_i^* , u_i^{**}

Ici on a posé :

$$u_i^n = u(x_i, t_n), \quad v_i^* = v(x_i, t^*), \quad u_i^{**} = u(x_i, t^{**}) \quad |8.51|$$

Les grandeurs v^* , u_i^{**} peuvent être calculées à l'aide d'un schéma quelconque. Examinons d'abord le schéma homogène qui apparaît si l'on pose par exemple :

$$\begin{aligned} v_i^* &= \alpha v_i^{n+1} + \beta v_i^n = \alpha v(u_i^{n+1}) + \beta v(u_i^n) \\ u_i^{**} &= u_i^* = \alpha u_i^{n+1} + \beta u_i^n \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1 \end{aligned} \quad |8.52|$$

Le schéma (8.50) prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \alpha \frac{[v(u_{i+1}^{n+1}) - v(u_{i-1}^{n+1})]}{2h} + \beta \frac{v(u_{i+1}^n) - v(u_{i-1}^n)}{2h} \\ = f(u_i^*) = f(\alpha u_i^{n+1} + \beta u_i^n) \end{aligned} \quad |8.53|$$

Pour réaliser le schéma (8.44), il faut linéariser les formules (8.54), posant :

$$\begin{aligned} v(u^{n+1}) &= v(u^n) + \left\| \frac{\partial v^n}{\partial u} \right\| (u^{n+1} - u^n) \\ f(u^*) &= f(u^n) + \left\| \frac{\partial f^n}{\partial u} \right\| (u^* - u^n) \end{aligned} \quad |8.54|$$

Après quoi les formules (8.53) se résolvent par récurrence vectorielle.

Remarquons que l'adjonction de (8.54) rend le schéma (8.53) non conservatif. Pour la conservation de cette propriété il est nécessaire de résoudre le schéma (8.53) de façon exacte et de considérer les relations (8.54) comme itératives :

$$\begin{aligned} v \begin{pmatrix} k+1 \\ u \end{pmatrix} &= v \begin{pmatrix} k \\ u \end{pmatrix} + \left\| \frac{\partial v^k}{\partial u} \right\| \begin{pmatrix} k+1 \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ u \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} k+1 \\ u \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} k \\ u \end{pmatrix} + \left\| \frac{\partial f^k}{\partial u} \right\| \begin{pmatrix} k+1 \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad |8.55|$$

où k est l'indice d'itération et où l'on a posé $u^0 = u^n$.

Par conséquent, apparaît dans le schéma homogène la nécessité d'effectuer une récurrence vectorielle avec des itérations non-linéaires. La méthode prédicteur-correcteur évite ces itérations. Pour le calcul de v^* on peut utiliser un schéma implicite absolument stable arbitraire, pas nécessairement conservatif et ne demandant pas d'itérations non-linéaires.

Récrivons le système (8.49) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad A = \left\| \frac{\partial v}{\partial u} \right\| \quad |8.56|$$

alors comme schéma possible pour la détermination de u^* et v^* on peut prendre :

$$\frac{u^* - u^n}{\tau} + A(u^n) \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u^* = f(u^n) + B(u^n)(u^* - u^n) \quad |8.57|$$

avec
$$B = \left\| \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| \right\|$$

réalisable à l'aide d'une récurrence vectorielle et ne nécessitant pas d'itérations (cf. [34]).

Déterminant u^* à partir de (8.57), on détermine v^* avec $v^* = v(u^*)$.

Appliquant le schéma (8.50), nous obtenons un schéma conservatif. Il sera absolument stable pour $t^* \geq \frac{t_n + t_{n+1}}{2}$ et il aura une précision du second ordre pour

$$t^* = \frac{t_n + t_{n+1}}{2}.$$

A la place de (8.58) on peut appliquer un autre schéma implicite, par exemple, un schéma majorant caractéristique (cf. [35]).

8.6 Équations de la météorologie

Les travaux de G. I. Martchouk [77] [78] [97] étudient un schéma implicite de désintégration pour l'intégration des équations de la météorologie :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - l u_2 = - \frac{\partial H}{\partial x_1} \quad |8.58 a|$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + l u_1 = - \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad |8.58 b|$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} - k_1 T \frac{u_3}{\rho} = q \quad |8.58 c|$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial \rho} = 0 \quad |8.58 d|$$

$$T = - k_2 \rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \quad |8.58 e|$$

où u_i sont les composantes de la vitesse sur les axes x_1, x_2, ρ ; T est la température, H est la hauteur de la surface isobare $\rho = C^{te}$, q est la chaleur massique, l est le paramètre de Coriolis, k_1 et k_2 sont des constantes.

Le système (8.58) n'est pas régulier, c'est-à-dire qu'il n'appartient pas au type des systèmes de Cauchy-Kovalevsky.

Introduisons les vecteurs-fonctions :

$$u = \{ u_1, u_2, T \}, \quad f = \left\{ - \frac{\partial H}{\partial x_1}, - \frac{\partial H}{\partial x_2}, k_1 \frac{T u_3}{\rho} + q \right\} \quad |8.59|$$

et la matrice :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -l & 0 \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad |8.60|$$

Les équations (8.58 a, b, c) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + A u = f \quad |8.61|$$

Pour une fonction f donnée, le sous-système (8.61) est un système fermé régulier de type hyperbolique.

Il se résout par la méthode de désintégration :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{3}} = 0 \quad |8.62 a|$$

$$\frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} + \Lambda_2 u^{n+\frac{2}{3}} = 0 \quad |8.62 b|$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} + A u^{n+1} = f^{n+1} \quad |8.62 c|$$

où les opérateurs Λ_1, Λ_2 , approchent respectivement les opérateurs :

$$u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, u_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Pour fermer le système (8.62) il faut définir f^{n+1} . Dans ce but nous adjoindrons à l'équation (8.62 d) l'approximation aux différences des équations (8.58 d), (8.58 e) :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_k + \Delta_{-k}}{2 h_k} (u_k)^{n+1} = 0$$

$$T^{n+1} = -k_2 \varrho \frac{\Delta_3 + \Delta_{-3}}{2 h_3} H^{n+1} \quad |8.63|$$

$$h_1 = \Delta x_1, \quad h_2 = \Delta x_2, \quad h_3 = \Delta \varrho.$$

L'équation (8.62 c) constitue avec les équations (8.63) (avec le calcul des conditions aux limites) un système fermé par rapport à u^{n+1} et H^{n+1} .

Éliminant u^{n+1} entre (8.62 c) et (8.63), on peut obtenir une équation en H^{n+1} , qui se résout itérativement.

Dans les chapitres précédents nous avons étudié une série de problèmes de physique mathématique et leur résolution par des schémas aux différences basés sur la méthode à pas fractionnaires. Dans ce chapitre nous allons essayer d'exposer un point de vue plus général des méthodes de construction de schémas à pas fractionnaires et aussi de donner un exposé de la méthode à pas fractionnaires pour une grande classe de schémas.

9.1 Formulation générale de la méthode de désintégration — Exposé dans le cas des opérateurs commutatifs (méthode d'élimination)

Pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles la méthode de désintégration (méthode à pas fractionnaires) a été formulée dans sa forme générale dans l'ouvrage de l'auteur [79] comme une méthode de construction de schémas implicites économiques. Dans l'ouvrage [79] ne sont examinés que les schémas à deux niveaux.

Dans la conférence de G. I. Martchouk et de l'auteur [51] dans *Conférence Nationale de Mathématiques Appliquées* (Moscou 1965) et dans le congrès IFIP (New York 1965), cette méthode a été formulée pour les systèmes d'équations intégrodifférentielles et pour les schémas à plusieurs niveaux à pas fractionnaires.

Étudions le système linéaire d'équations intégrodifférentielles par rapport à un vecteur-fonction inconnu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Omega u + f \quad |9.1|$$

pour lequel est bien posé dans un certain espace de Banach le problème de Cauchy :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad |9.2|$$

Soit :
$$\Omega = \sum_{i=1}^p \Omega_i \quad |9.3|$$

une représentation de l'opérateur intégro-différentiel Ω comme somme de p opérateurs $\Omega_1 \dots \Omega_p$, ceux-ci étant approchés par les opérateurs Λ_{ij} de manière à ce que soient vérifiées les relations d'approximations suivantes¹ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{10} + \Lambda_{11} &\sim \Omega_1 \\ \Lambda_{20} + \Lambda_{21} + \Lambda_{22} &\sim \Omega_2 \\ \dots\dots\dots \\ \Lambda_{p0} + \Lambda_{p1} + \dots\dots\dots + \Lambda_{pp} &\sim \Omega_p \end{aligned} \quad |9.4|$$

Le schéma de désintégration a la forme :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{p}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{10} u^n + \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{p}} + F_1 \\ \frac{u^{n+\frac{2}{p}} - u^{n+\frac{1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_{20} u^n + \Lambda_{21} u^{n+\frac{1}{p}} + \Lambda_{22} u^{n+\frac{2}{p}} + F_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_{p0} u^n + \Lambda_{p1} u^{n+\frac{1}{p}} + \dots \Lambda_{pp} u^{n+1} + F_p \end{aligned} \quad |9.5|$$

dans lequel $F_s = \Lambda_s f, \quad \sum_{s=1}^p \Lambda_s \sim E \quad |9.6|$

Si $\Lambda_{sr} = 0$ pour $r < s - 1 \quad |9.7|$

alors chacune des équations du schéma (9.5) est à deux niveaux. Il est facile de formuler les conditions de convergence du schéma aux différences (9.5) vers l'équation (9.1) si tous les opérateurs aux différences étudiés Λ_{ij}, Λ_i sont commutatifs.

Étudions pour simplifier le cas des schémas homogènes à deux niveaux ($f = 0, F_s = 0, \Lambda_{sr} = 0, \text{ pour } r < s - 1$) :

$$\frac{u^{n+\frac{k}{p}} - u^{n+\frac{k-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_{k,k-1} u^{n+\frac{k-1}{p}} + \Lambda_{k,k} u^{n+\frac{k}{p}} \text{ pour } k = 1 \dots p \quad |9.8|$$

Construisons le schéma équivalent en pas entiers. (9.8) peut s'écrire sous la forme :

$$A_k u^{n+\frac{k}{p}} = B_k u^{n+\frac{k-1}{p}} \quad |9.9|$$

avec : $A_k = E - \tau \Lambda_{kk}; \quad B_k = E + \tau \Lambda_{k,k-1} \quad (k = 1 \dots p)$

1. Remarquons que les opérateurs Λ_{ij} peuvent être de structure quelconque en particulier aux différences ou intégro-différentiels.

Après quoi, appliquant comme Douglas [12] la méthode d'élimination et utilisant la commutativité des opérateurs A_k , B_k , nous obtenons le schéma en pas entiers :

$$A u^{n+1} = B u^n, \quad A = \prod_{i=1}^p A_i, \quad B = \prod_{i=1}^p B_i \quad |9.10|$$

ou encore, en ordonnant A et B par rapport à τ :

$$A = E - \tau (\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \dots + \Lambda_{pp}) + \tau^2 (\Lambda_{11} \Lambda_{22} + \dots + \Lambda_{p-1, p-1} \Lambda_{pp}) \\ + \dots + (-1)^p \tau^p \prod_{i=1}^p \Lambda_{ii} \quad |9.11|$$

$$B = E + \tau (\Lambda_{10} + \Lambda_{21} + \dots + \Lambda_{p, p-1}) + \tau^2 (\Lambda_{10} \Lambda_{21} + \dots \\ + \Lambda_{p-1, p-2} \Lambda_{p, p-1}) + \dots + \tau^p \Lambda_{10} \Lambda_{21} \dots \Lambda_{p, p-1}$$

Tenant compte de (9.11), le schéma (9.10) peut s'écrire :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{k=1}^p (\Lambda_{kk-1} u^n + \Lambda_{kk} u^{n+1}) + \tau \Phi \quad |9.12|$$

avec :

$$\Phi = \sum_{i < j} (\Lambda_{i, i-1} \Lambda_{j, j-1} u^n - \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} u^{n+1}) \\ + \tau \sum_{i < j < k} (\Lambda_{i, i-1} \Lambda_{j, j-1} \Lambda_{k, k-1} u^n + \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} \Lambda_{kk} u^{n+1}) \dots \\ \dots + \tau^{p-2} [\Lambda_{10} \Lambda_{21} \dots \Lambda_{p, p-1} u^n + (-1)^{p-1} \Lambda_{11} \Lambda_{22} \dots \Lambda_{pp} u^{n+1}] \quad |9.13|$$

L'égalité (9.12) démontre la consistance du schéma à deux niveaux (9.9), puisque en vertu de (9.4) et de (9.7) nous avons :

$$\sum_{k=1}^p (\Lambda_{k, k-1} + \Lambda_{kk}) \sim \sum_{k=1}^p \Omega_k = \Omega \quad |9.14|$$

Trouvons maintenant les conditions pour que le schéma (9.9) soit correct, ou, ce qui revient au même, pour que le schéma (9.10) le soit.

L'équation (9.9) peut s'écrire sous la forme :

$$u^{n+\frac{k}{p}} = C_k u^{n+\frac{k-1}{p}} \quad \text{avec} \quad C_k = A_k^{-1} B_k, \quad k = 1 \dots p \quad |9.15|$$

Le schéma en pas entiers prend alors la forme :

$$u^{n+1} = C u^n, \quad C = C_p C_{p-1} \dots C_1 = A^{-1} B \quad |9.16|$$

Le schéma (9.9) est donc uniformément correct si :

$$\|C\| = \left\| \prod_{i=1}^p C_i \right\| \leq 1 + C^{te} \cdot \tau \quad |9.17|$$

Par conséquent la stabilité de chacune des équations du schéma (9.9) n'est pas nécessaire.

D'après le théorème connu (cf. ch. 1) la convergence a lieu, si

$$\|A^{-1}\| \leq M, \quad \|C\| \leq 1 + N\tau \quad |9.18|$$

où les constantes M et N sont indépendantes de n, τ .

9.2 Justification de la méthode de désintégration dans le cas des opérateurs non commutatifs

Dans le cas général des opérateurs non commutatifs, le critère de convergence est le même, mais la démonstration est plus compliquée. Indiquons les changements que subit la méthode d'élimination dans le cas des opérateurs non commutatifs. Nous allons prendre l'exemple du schéma à deux niveaux (9.9) avec deux pas fractionnaires ($p = 2$).

Comme les opérateurs A_k et B_k ne sont pas commutatifs, la méthode habituelle d'élimination n'est pas applicable. Multiplions la première équation de (9.9) par l'opérateur \bar{B}_2 , la deuxième par \bar{A}_1 , où les opérateurs \bar{B}_2 et \bar{A}_1 sont indéterminés pour le moment.

Nous obtenons, après combinaison des deux équations :

$$\bar{A}_1 A_2 u^{n+1} - \bar{B}_2 B_1 u^n = (\bar{A}_1 B_2 - \bar{B}_2 A_1) u^{n+\frac{1}{2}} \quad |9.19|$$

$$\text{Posons : } \bar{A}_1 = A_1 + \tau^s a_1, \quad \bar{B}_2 = B_2 + \tau^s b_2 \quad |9.20|$$

avec comme indéterminées a_1 et b_2 et l'exposant s . D'où nous avons :

$$\bar{A}_1 B_2 - B_2 A_1 = \tau^2 (\Lambda_{21} \Lambda_{11} - \Lambda_{11} \Lambda_{21}) + \tau^s (a_1 B_2 - b_2 A_1) \quad |9.21|$$

$$\text{Posant : } \bar{A}_1 B_2 - \bar{B}_2 A_1 = 0 \quad |9.22|$$

$$\text{nous obtenons : } s = 2 \quad |9.23|$$

$$b_2 A_1 - a_1 B_2 = \Lambda_{21} \Lambda_{11} - \Lambda_{11} \Lambda_{21} \quad |9.24|$$

Si les opérateurs a_1, b_2 satisfont la condition (9.24) alors l'équation (9.19) prend la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) u^{n+1} + (\Lambda_{10} + \Lambda_{21}) u^n + \tau \Phi \quad |9.25|$$

$$\Phi = -\Lambda_{11} \Lambda_{22} u^{n+1} + \Lambda_{21} \Lambda_{10} u^n + b_2 B_1 u^n - a_1 A_2 u^{n+1} \quad |9.26|$$

Posons, pour la détermination de $b_2, a_1 = 0$. Alors de (9.24) on tire :

$$b_2 = (\Lambda_{21} \Lambda_{11} - \Lambda_{11} \Lambda_{21}) A_1^{-1} \quad |9.27|$$

Après quoi Φ prend la forme :

$$\Phi = -\Lambda_{11} \Lambda_{22} u^{n+1} + \Lambda_{21} \Lambda_{10} u^n + (\Lambda_{21} \Lambda_{11} - \Lambda_{11} \Lambda_{21}) A_1^{-1} B_1 u^n \quad |9.28|$$

où les opérateurs $B_i, B_{i_1 i_2}, \dots, B_{i_1 \dots i_q}$ satisfont aux estimations :

$$\| B_i \| \leq M_2, \quad \| B_{i_1, \dots, i_2} \| \leq M_2, \quad \dots \quad \| B_{i_1 \dots i_q} \| \leq M_2 \quad |9.36|$$

et M_2 est indépendant de $h_1 \dots h_m$.

Démonstration

Appliquant à l'identité $AA^{-1} = E$ (E matrice unité) l'opérateur δ_i , nous avons :

$$(A + \delta_i A) \delta_i A^{-1} + \delta_i A.A^{-1} = 0 \quad |9.37|$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \delta_i A^{-1} &= -(A + h_i A_i)^{-1} \delta_i A_i A^{-1} = \\ &= -h_i (A + h_i A_i)^{-1} A_i A^{-1} = -h_i B_i \end{aligned} \quad |9.38|$$

et B_i satisfait l'estimation (9.36). On démontre de façon identique les estimations pour $B_{i_1 i_2}, \dots, B_{i_1 \dots i_q}$.

LEMME 2

Énoncé Si :

a) l'opérateur A satisfait les conditions (9.33), (9.34) du lemme 1;

b) $\| f \| \leq M_3, \quad \| \Delta_i f \| \leq h_i M_3, \dots, \| \Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_q} f \| \leq h_{i_1} \dots h_{i_q} M_3$

et la constante M_3 ne dépend pas des h_i ,

alors on a l'estimation :

$$\| A^{-1} f \| \leq M_4, \quad \| \Delta_i (A^{-1} f) \| \leq h_i M_4, \dots, \| \Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_q} (A^{-1} f) \| \leq h_{i_1} \dots h_{i_q} M_4$$

où la constante M_4 ne dépend pas des h_i .

Démonstration

L'estimation $\| A^{-1} f \| \leq M_4$ est évidente. Estimons la quantité $\Delta_i (A^{-1} f)$.

Utilisant l'égalité (9.32) et l'appliquant à l'opérateur A^{-1} , nous avons :

$$\Delta_i (A^{-1} f) = (A^{-1} + \delta_i A^{-1}) \Delta f + \delta_i A^{-1} f \quad |9.39|$$

$$\text{soit, en utilisant (9.35) : } \frac{\Delta_i}{h_i} (A^{-1} f) = (A^{-1} + h_i B_i) \frac{\Delta_i}{h_i} f + B_i f \quad |9.40|$$

Appliquant les estimations (9.34) et (9.36) du lemme 1, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Delta_i}{h_i} (A^{-1} f) \right\| &\leq [\| A^{-1} \| + h_i \| B_i \|] \cdot \left\| \frac{\Delta_i}{h_i} f \right\| \\ &+ \| B_i \| \cdot \| f \| \leq (M_1 + h_i M_2) \left\| \frac{\Delta_i}{h_i} f \right\| + M_2 \| f \| \end{aligned} \quad |9.41|$$

donc le lemme 2 est démontré pour $\Delta_i (A^{-1}f)$. On démontre de même le lemme 2 pour $\Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_q} (A^{-1}f)$.

Appliquant les lemmes 1 et 2 à l'estimation (9.29) nous voyons que, pour des coefficients de l'équation (9.19) suffisamment réguliers et pour une solution $u(x, t)$ suffisamment régulière, la consistance a lieu.

L'idée de la démonstration de la consistance fut donnée par l'auteur dans une conférence du IV^e Congrès National de Mathématiques (cf. [28]), puis l'étude détaillée fut donnée dans les articles de l'auteur [80], de Y. E. Boïarintsev [81].

Une grande quantité d'ouvrages sont consacrés à l'exposé, à l'aide d'estimation *à priori*, de la méthode à pas fractionnaires pour une large classe d'équations à coefficients variables. Notons en premier lieu les ouvrages de Lees [82], [83], E. G. Diakonov [21-24] et A. A. Samarsky [84, 85, 41, 63].

9.3 Méthode de factorisation approchée d'un opérateur

L'ouvrage de Baker et Oliphant [16] formule la méthode de factorisation exacte d'un opérateur au niveau supérieur qui, dans le cas de l'équation de la chaleur, conduit à un schéma analogue au schéma de désintégration. Cependant, la méthode de factorisation exacte s'avère inapplicable aux équations à coefficients variables.

L'ouvrage de l'auteur [18] formule l'idée de la factorisation approchée d'un opérateur qui est applicable même pour les équations à coefficients variables. Les ouvrages de E. G. Diakonov [21-24], étudient et exposent la méthode de factorisation approchée (*méthode de l'opérateur désintégrable* dans la terminologie de E. G. Diakonov) pour une large classe d'équations du type hyperbolique et parabolique.

Nous donnons ici la formulation générale de la méthode de factorisation approchée correspondant à l'ouvrage de G. I. Martchouk et de l'auteur [51].

$$\text{Soit : } \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n + F^n \quad [9.42]$$

une approximation aux différences homogènes de l'équation (9.1).

La fonction F^n approche f et, dans le cas des schémas à plusieurs niveaux, contient également le résultat de l'application des opérateurs aux différences à u^{n-1} , u^{n-2} , etc. Nous limitant pour le moment au cas des approximations à deux niveaux, exposons la méthode de factorisation approchée (cf. [51]).

$$\text{Soient : } \Lambda_1 = \sum_{i=1}^p \Lambda_{1i} \quad \Lambda_0 = \sum_{i=1}^q \Lambda_{0i} \quad [9.43]$$

une représentation des opérateurs au niveau supérieur et au niveau inférieur Λ_1 et Λ_0 sous la forme de somme d'opérateurs de structure plus simple.

Les relations d'approximation suivantes sont vérifiées :

$$\prod_{i=1}^p (E - \tau \Lambda_{1i}) \sim E - \tau \Lambda_{11}; \quad \prod_{i=1}^q (E + \tau \Lambda_{0i}) \sim E + \tau \Lambda_{01} \quad |9.44|$$

On remplace donc le schéma (9.42) par le schéma factorisé :

$$\prod_{i=1}^p (E - \tau \Lambda_{1i}) u^{n+1} = \prod_{i=1}^q (E + \tau \Lambda_{0i}) u^n + \tau F^n \quad |9.45|$$

Il est facile d'établir que le schéma (9.45) est consistant l'équation à (9.1). Effectivement, développant (9.45) par rapport à τ , nous avons :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{i=1}^p \Lambda_{1i} u^{n+1} + \sum_{i=1}^q \Lambda_{0i} u^n + F^n + \tau \Phi \quad |9.46|$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \Phi = & \left[\sum_{i < j} \Lambda_{0i} \Lambda_{0j} + \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_{0i} \Lambda_{0j} \Lambda_{0k} + \dots + \tau^{q-2} \prod_{i=1}^q \Lambda_{0i} \right] u^n \\ & + \left[- \sum_{i < j} \Lambda_{1i} \Lambda_{1j} + \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_{1i} \Lambda_{1j} \Lambda_{1k} + \dots + (-1)^{p-1} \tau^{p-2} \prod_{i=1}^p \Lambda_{1i} \right] u^{n+1} \quad |9.47| \end{aligned}$$

(9.46) et (9.47) entraînent la consistance.

Par conséquent, contrairement à la méthode de désintégration, dans la méthode de factorisation approchée la consistance s'établit directement. Remarquons que le schéma (9.42) et la représentation (9.43) ne déterminent pas de façon unique un schéma correspondant. Ainsi, par exemple, le schéma :

$$(E - \tau \Lambda_{1p}) (E - \tau \Lambda_{1,p-1}) \dots (E - \tau \Lambda_{11}) u^{n+1} = (E + \tau \Lambda_{0q}) (E + \tau \Lambda_{0,q-1}) \dots \dots (E + \tau \Lambda_{01}) u^n + \tau F^n \quad |9.45 a|$$

dans le cas général des opérateurs Λ_{1i} et Λ_{0i} non commutatifs, n'est pas équivalent au schéma (9.45), et ne lui devient équivalent que dans le cas des opérateurs commutatifs. Occupons-nous maintenant de l'analyse de la stabilité qui est, au contraire, généralement plus difficile que pour la méthode de désintégration. Posons, pour simplifier, $f = 0$. Nous écrivons l'équation (9.45) sous la forme :

$$u^{n+1} = (E - \tau \Lambda_{1p})^{-1} (E - \tau \Lambda_{1,p-1})^{-1} \dots (E - \tau \Lambda_{11})^{-1} (E + \tau \Lambda_{01}) \dots \dots (E + \tau \Lambda_{0q}) u^n \quad |9.48|$$

Si pour l'opérateur de passage :

$$C = (E - \tau \Lambda_{1p})^{-1} \dots (E - \tau \Lambda_{11})^{-1} (E + \tau \Lambda_{01}) \dots (E + \tau \Lambda_{0q}) \quad |9.49|$$

$$\text{on a l'estimation : } \|C\| \leq 1 + C^{te} \tau \quad |9.50|$$

alors le schéma (9.48) est uniformément correct.

L'estimation de la norme de l'opérateur C de (9.49) est assez difficile.

Dans le cas $p = q$ et des opérateurs commutatifs, nous avons :

$$\begin{aligned} C = & (E - \tau \Lambda_{1p})^{-1} (E + \tau \Lambda_{0p}) (E - \tau \Lambda_{1,p-1})^{-1} (E + \tau \Lambda_{0,p-1}) \dots \\ & (E - \tau \Lambda_{11})^{-1} (E + \tau \Lambda_{10}) = C_p C_{p-1} \dots C_1 \quad |9.51| \end{aligned}$$

$$\text{avec } C_s = (E - \tau \Lambda_{1s})^{-1} (E + \tau \Lambda_{0s})$$

Dans ce cas le schéma de factorisation approchée (9.45) est équivalent au schéma de désintégration :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{p}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{p}} + \Lambda_{01} u^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{p}} - u^{n+\frac{1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_{12} u^{n+\frac{2}{p}} + \Lambda_{02} u^{n+\frac{1}{p}} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_{1p} u^{n+1} + \Lambda_{0,p-1} u^{n+\frac{p-1}{p}} + H^n \end{aligned} \quad |9.52|$$

avec $H^n = A_{p-1}^{-1} \dots \dots \dots A_1^{-1} F^n$.

En effet, éliminant $u^{n+\frac{1}{p}}, u^{n+\frac{2}{p}}, \dots, u^{n+\frac{p-1}{p}}$ entre les équations (9.52), on obtient le schéma :

$$u^{n+1} = C_p C_{p-1} \dots C_1 u^n + \tau A_p^{-1} \dots A_1^{-1} F^n \quad |9.53|$$

Dans le cas général des opérateurs non commutatifs et de $p \neq q$, le schéma (9.45) est équivalent au schéma suivant à pas fractionnaires :

$$\begin{aligned} (E - \tau \Lambda_{11}) u^{n+\frac{1}{p}} &= \left[\prod_{i=1}^q (E + \tau \Lambda_{0i}) \right] u^n + \tau F^n \\ (E - \tau \Lambda_{12}) u^{n+\frac{2}{p}} &= u^{n+\frac{1}{p}} \\ &\dots\dots\dots \\ (E - \tau \Lambda_{1p}) u^{n+1} &= u^{n+\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \quad |9.54|$$

Ce dernier schéma est encore équivalent au schéma de désintégration :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{p}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{p}} + \Omega u^n + F^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{p}} - u^{n+\frac{1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_{12} u^{n+\frac{2}{p}} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_{1p} u^{n+1}, \quad \Omega = \frac{1}{\tau} \left[\prod_{i=1}^q (E + \tau \Lambda_{0i}) - E \right] \end{aligned} \quad |9.55|$$

Par conséquent, la réalisation de (9.55) est liée à la représentation de l'opérateur sous la forme $\prod_{i=1}^p (E - \tau \Lambda_{1i})$ de structure plus simple que $E - \tau \Lambda_1$, ce qui simplifie considérablement l'algorithme. Il est clair que la réalisation du schéma factorisé sous forme de schéma à pas fractionnaires n'est pas unique.

De façon générale, on peut considérer le schéma (9.45) comme un certain schéma canonique équivalent à différents schémas à pas fractionnaires.

Passons maintenant à l'étude des schémas à factorisation approchée issus de schémas à niveaux multiples :

$$A_1 u^{n+1} + A_0 u^n + A_{-1} u^{n-1} + \dots + A_{-p+1} u^{n-p+1} + f^n = 0 \quad |9.56|$$

De tels schémas peuvent être considérés comme étant le résultat d'une approximation homogène du système (9.1) mais aussi de systèmes plus compliqués de la forme :

$$\sum_{i=1}^p B_i \frac{\partial^i u}{\partial t^i} = \Omega u + f \quad |9.57|$$

où les B_i sont des opérateurs linéaires.

Représentons les opérateurs A_s sous la forme :

$$A_s = E + \tau^{a_s} \Lambda_s, \quad s = 1, 0, -1, \dots, -p + 1 \quad |9.58|$$

où Λ_s est un opérateur spatial et où

$$\Lambda_s = \sum_{i=1}^{q_s} \Lambda_{si}, \quad s = 1 \dots, -p + 1 \quad |9.59|$$

est une représentation de l'opérateur Λ_s sous la forme de la somme d'opérateurs de structure plus simple. Alors le schéma de factorisation approchée, correspondant au schéma (9.56) et à la représentation (9.59), a la forme :

$$\bar{A}_1 u^{n+1} + \bar{A}_0 u^n + \bar{A}_{-1} u^{n-1} + \dots + \bar{A}_{-p+1} u^{n-p+1} + f^n = 0 \quad |9.60|$$

avec :

$$\bar{A}_s = \prod_{i=1}^{q_s} (E + \tau^{a_s} \Lambda_{si}) = A_s + \tau^{2 a_s} \Phi_s \quad |9.61|$$

$$\Phi_s = \sum_{i < j} \Lambda_{si} \Lambda_{sj} + \dots + (\tau^{a_s})^{q_s-2} \Lambda_{s1} \dots \Lambda_{sq_s} \quad |9.62|$$

Pour démontrer la consistance de (9.60), comme d'habitude, on a ordonné (9.60) par rapport à τ . L'étude de la stabilité du schéma présente ici aussi une difficulté à la base. Remarquons, en conclusion, que l'opération de base dans la construction des schémas indiqués est la factorisation approchée de l'opérateur au niveau supérieur puisque c'est elle qui permet la simplification de la réalisation du schéma. La factorisation de l'opérateur au niveau inférieur a le caractère d'opération complémentaire car elle garantit la stabilité et la précision du schéma. C'est pourquoi on peut chercher les opérateurs au niveau inférieur sous une forme plus générale :

$$\bar{A}_s = A_s + \tau^{p_s} \Phi_s = E + \tau^{a_s} \Lambda_s + \tau^{p_s} \Phi_s \quad |9.63|$$

où les opérateurs Φ_s ont une structure arbitraire.

Ici, la méthode à pas fractionnaires a le caractère de méthode à *opérateur (ou coefficient) indéterminé*. La théorie de tels schémas à structure générale est encore faiblement étudiée.

9.4 Méthode à corrections stabilisatrices

La méthode à corrections stabilisatrices, introduite par Douglas et Rachford [12] et formulée sous forme générale dans l'ouvrage de Douglas et Gunn [86], est une méthode très générale et très efficace de construction de schémas à pas fractionnaires.

$$\text{Soit :} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + F^n \quad |9.64|$$

$$\text{où} \quad F^n = A_0 u^n + A_{-1} u^{n-1} + \dots + A_{-q+1} u^{n-q+1} + f^n \quad |9.65|$$

est le schéma homogène de départ.

$$\text{Posons :} \quad \Lambda = \sum_{i=1}^p \Lambda_i \quad |9.66|$$

En correspondance avec les schémas (9.64) et (9.65) et la représentation (9.66), posons le schéma suivant à pas fractionnaires :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{p}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \left(u^{n+\frac{1}{p}} - u^n \right) + \Lambda u^n + F^n \\ \frac{u^{n+\frac{2}{p}} - u^{n+\frac{1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_2 \left(u^{n+\frac{2}{p}} - u^{n+\frac{1}{p}} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_p \left(u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}} \right) \end{aligned} \quad |9.67|$$

Par conséquent, éliminant $u^{n+\frac{1}{p}}, u^{n+\frac{2}{p}}, \dots, u^{n+\frac{p-1}{p}}$, nous obtenons le schéma factorisé équivalent en pas entiers :

$$\prod_{i=1}^p (E - \tau \Lambda_i) u^{n+1} = \tau \Lambda u^n + \tau F^n + (E - \tau \Lambda_1) u^n - (E - \tau \Lambda_1) \Lambda_2 u^n \dots - \tau (E - \tau \Lambda_1) \dots (E - \tau \Lambda_{p-1}) \Lambda_p u^n \quad |9.68|$$

Après une transformation algébrique, nous obtenons :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + F^n - \tau^2 \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) \quad |9.69|$$

$$\text{avec} \quad \Phi = \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j - \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + (-1)^p \tau^{p-2} \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_p \quad |9.70|$$

Des représentations (9.69), (9.70) on déduit qu'avec la précision 0 (τ^2) le schéma à corrections stabilisatrices conserve la consistance du schéma de départ (9.64), (9.65).

Passons à l'analyse de la stabilité du schéma à corrections stabilisatrices. Supposons pour simplifier que u est une fonction scalaire et que les opérateurs Λ_s et A_s sont commutatifs.

Alors, appliquant l'analyse spectrale de la stabilité au schéma (9.64), on trouve :

$$\frac{\varrho_{1-1}}{\tau} = \lambda \varrho_1 + g(\varrho_1) \quad |9.71|$$

où ϱ_1 est le coefficient d'accroissement du schéma (9.64) et λ la valeur propre de l'opérateur Λ , avec :

$$g(\varrho_1) = a_0 + a_{-1} \frac{1}{\varrho_1} + \dots + a_{-q+1} \frac{1}{\varrho_1^{q-1}}$$

étant l'accroissement de l'erreur correspondant à l'opérateur :

$$A_0 u^n + A_{-1} u^{n-1} + \dots + A_{-q+1} u^{n-q+1},$$

$a_0, a_{-1}, \dots, a_{-q+1}$ étant les valeurs propres des opérateurs : $A_0, A_{-1}, \dots, A_{-q+1}$. De façon analogue, pour le schéma (9.69) nous obtenons :

$$\frac{\varrho - 1}{\tau} = \lambda \varrho + g(\varrho) - \tau^2 \varphi \left(\frac{\varrho - 1}{\tau} \right) \quad |9.72|$$

où $\varphi \left(\frac{\varrho - 1}{\tau} \right)$ est l'accroissement de l'erreur correspondant à l'opérateur $\Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right)$.

Pour $\varphi \left(\frac{\varrho - 1}{\tau} \right)$ on a l'expression suivante :

$$\varphi \left(\frac{\varrho - 1}{\tau} \right) = \frac{a}{\tau} (\varrho - 1) \quad |9.73|$$

$$\text{où : } a = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j - \tau \sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \dots + (-1)^p \tau^{p-2} \lambda_1 \dots \lambda_p \quad |9.74|$$

$\lambda_1 \dots \lambda_p$ étant les valeurs propres des opérateurs $\Lambda_1 \dots \Lambda_p$.

Par conséquent, pour les coefficients d'accroissement ϱ_1 et ϱ , nous avons les relations :

$$\varrho_1 = \frac{1 + \tau g(\varrho_1)}{1 - \lambda \tau} \quad \varrho = \frac{1 + \tau g(\varrho) + a \tau^2}{1 - \lambda \tau + a \tau^2} \quad |9.75|$$

Dans le cas des schémas à deux niveaux, $g(x)$ ne dépend pas de x et on a le théorème suivant :

Si les λ_i sont tous négatifs (on en déduit que a est positif d'après (9.74), la stabilité du schéma (9.64) entraîne la stabilité du schéma (9.69) .

Pour une analyse plus détaillée de la stabilité, nous renvoyons le lecteur à [86].

9.5 Méthode à corrections d'approximation

La méthode à corrections d'approximation consiste à obtenir le maximum de stabilité au cours de pas préparatoires et à construire le schéma exact au dernier pas.

$$\text{Soit : } \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + f^n \quad |9.76|$$

un schéma homogène à deux échelons consistant à l'équation (9.1).

$$\text{Posons : } \Lambda = \sum_{i=1}^p \Lambda_i \quad |9.77|$$

Le schéma à corrections d'approximation correspondant à (9.76), (9.77) à la forme :

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2p}} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2p}} \quad |9.78|$$

.....

$$\frac{u^{n+\frac{p}{2p}} - u^{n+\frac{p-1}{2p}}}{\tau/2} = \Lambda_p u^{n+\frac{p}{2p}} = \Lambda_p u^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+\frac{1}{2}} + F^n \quad |9.79|$$

où F^n est une certaine approximation de f^n .

Éliminant $u^{n+\frac{1}{p}}, u^{n+\frac{2}{p}}, \dots, u^{n+\frac{p-1}{p}}$, nous obtenons

$$\prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right) u^{n+\frac{1}{2}} = u^n \quad |9.80|$$

Multipliant (9.79) par $\prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right)$, on trouve :

$$\prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right) \Lambda u^{n+\frac{1}{2}} + \prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right) F^n \quad |9.81|$$

Si les opérateurs sont commutatifs (en fait si Λ commute avec $\prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right)$), en utilisant (9.80) on obtient le schéma en pas entiers :

$$\left[\prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right) \right] \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + \left[\prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right) \right] F^n \quad |9.82|$$

Ordonnant en τ , on trouve :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) + \left[\prod_{i=1}^p \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_i \right) \right] F^n \quad |9.83|$$

avec :

$$\Phi = \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j - \frac{\tau}{2} \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + (-1)^{p-2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^{p-2} \Lambda_1 \dots \Lambda_p \quad |9.84|$$

Si l'on pose :

$$F^n = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_p \right)^{-1} \dots \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right)^{-1} f^n \quad |9.85|$$

nous arrivons en définitive au schéma :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) + f^n \quad |9.86|$$

qui est du second ordre d'approximation en t par rapport au schéma (9.76).

Dans le cas où les valeurs propres des opérateurs Λ_s sont négatives on démontre de façon analogue à 9.4 que la stabilité de (9.76) entraîne la stabilité de (9.78), (9.79).

9.6 Méthode de stationnarisation

La plupart des schémas itératifs étudiés jusqu'à présent, de résolution du problème stationnaire de conditions aux limites pour l'équation stationnaire :

$$\mathcal{L} u - f = 0 \quad |9.87|$$

où \mathcal{L} est un opérateur elliptique, se ramènent à des schémas d'intégration de l'équation parabolique d'évolution correspondante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u - f \quad |9.88|$$

Par conséquent, le processus itératif reproduit le processus d'établissement d'une résolution aux différences non stationnaire qui est une résolution approchée de l'équation (9.88). Cependant, une telle correspondance entre le processus itératif et le processus pour l'équation (9.88) n'est pas obligatoire. On peut mettre l'équation (9.87) en correspondance avec l'équation de structure plus générale :

$$\mathbf{P} \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \mathcal{L} u - f \quad |9.89|$$

où l'opérateur $P \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ a la forme d'une matrice opérant sur le vecteur $\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^q u}{\partial t^q} \right)$.

Nous appellerons l'opérateur $P \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ *opérateur de relaxation*; cet opérateur peut avoir une structure très générale pourvu que la solution générale de l'équation (9.89) aboutisse à un régime stationnaire.

Des schémas de ce type ont été étudiés dans les ouvrages [27], [74] et dans les paragraphes 4.7, 5 et 3.8 de cet ouvrage. Comme nous l'avons fait remarquer dans (ch.1.8)

l'opérateur de relaxation $P \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ peut également dépendre des points $x_1 \dots x_m$, ce qui augmente la vitesse de convergence. L'opérateur de relaxation peut être introduit directement dans le schéma itératif.

Soit Λ l'approximation de l'opérateur Ω .

Étudions la représentation universelle du schéma itératif à deux niveaux (cf. [87]) :

$$B \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) = \Lambda u^n - f \quad |9.90|$$

avec l'opérateur indéterminé B qui peut dépendre également de l'indice n d'itération. Il est clair que le schéma (9.90) satisfait la condition de consistance totale et est fortement stable sous la condition :

$$\|C\| = \|E + \tau B^{-1} \Lambda\| \leq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad |9.91|$$

A l'heure actuelle sont formulées deux méthodes de construction de schémas itératifs basés sur la représentation (9.90).

La méthode de *l'opérateur majorant*, proposée par E. G. Diakonov (cf. [46], [47]), consiste à remplacer l'opérateur Λ par un opérateur majorant B satisfaisant la condition :

$$\delta_0 (B u, u) \leq (\Lambda u, u) \leq \delta_1 (B u, u) \quad |9.92|$$

où δ_0 et δ_1 sont des constantes positives.

Alors l'équation : $B u^{n+1} = B u^n + \tau (\Lambda u^n - f)$ |9.93|

peut être résolue par rapport à u^{n+1} , pour u^n donné, par des itérations. Pour la simplicité de la réalisation, B doit avoir une structure plus simple que Λ . C'est-à-dire que si, par exemple (cf. ch. 4.5) : $\Lambda = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + 2 a_{12} \Lambda_{12}$

on posera alors $B = \Lambda_{11} + \Lambda_{22}$.

Dans la méthode de *l'opérateur stabilisateur* (cf. [51]) pour la stabilité de la réalisation on prend l'opérateur B factorisé :

$$B = B_1 B_2 \dots B_p \quad |9.94|$$

où les opérateurs B_s doivent être inversibles et l'opérateur C de (9.91) doit être fortement stable.

En particulier, les opérateurs B_s peuvent avoir la forme : $E - \tau \Lambda_s$ et dans le cas des opérateurs Λ_s non-positifs, ils seront inversibles.

Remarquons que la condition $\sum_{s=1}^p \Lambda_s = \Lambda$

n'est pas du tout obligatoire. La seule condition est la condition de forte stabilité de (9.91).

On peut étudier le schéma itératif à plusieurs niveaux de la forme :

$$\sum_{s=1}^q B_s \left(\frac{\Delta_0}{\tau} \right)^s u^n = \Lambda u^n + f \quad |9.95|$$

avec les opérateurs indéterminés $B_s, s = 1 \dots q$. Pour des opérateurs B_s quelconques, le schéma (9.95) remplira la condition de consistance totale.

La méthode de l'opérateur stabilisateur est utilisable pour l'obtention de schémas à haute précision également dans le cas d'équations à coefficients variables. Les premiers schémas de type à opérateur stabilisateur ont été obtenus par A. A. Samarsky [63], [64], E. G. Diakonov [90], [95].

Les recherches en France sur la méthode des pas fractionnaires, stimulées par la visite en 1966 du Professeur G. Martchouk, ont donné lieu aux travaux [A] [L]. Ces recherches se sont développées suivant les axes suivants :

- (i) problèmes *unilatéraux* de la mécanique (cf. par ex. équation |1| ci-dessous) et décomposition (ou éclatement) des contraintes.
- (ii) démonstrations assez générales de convergence et extension à des cas non linéaires variés.

Voici quelques détails techniques :

Soit V (resp $V_i, i = 1, \dots, q$; resp H) un espace de Hilbert sur \mathbb{R} de norme $\| \cdot \|$ (resp $\| \cdot \|_i$; resp $|\cdot|$) avec $V \subset V_i \subset H$, chaque espace étant contenu dans le suivant avec injection continue, H étant identifié à son dual. On suppose que $V = \bigcap_{i=1}^q V_i$.

On désigne par (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans H ou dans la dualité V, V' . Soit X (resp X_i) un convexe fermé de V (resp V_i) avec $X = \bigcap_{i=1}^q X_i$.

Soit A un opérateur de V dans V' , dual de V .

Problème 1

On cherche $u \in X$ solution de l'inégalité

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X \text{ pour } f \text{ donné dans } V'. \quad |1|$$

Si on fait $X = V$, le problème 1 contient le :

Problème 2

On cherche $u \in V$ solution de l'équation

$$Au = f, \text{ pour } f \text{ donné dans } V'. \quad |2|$$

On se donne maintenant deux paramètres, $\varepsilon, k > 0$

où $k = T/N$, T fixé, N entier tels que $\varepsilon \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ et $k/\varepsilon \rightarrow 0$.

On pose alors $A = \sum_{i=1}^q A_i$ et $f = \sum_{i=1}^q f_i$ (décomposition non unique). On se donne $u^0 \in X_q$

quelconque. Supposons que $U^{n+\frac{i-1}{a}}$ soit connu dans X_{i-1} ; on détermine $U^{n+\frac{i}{a}}$ comme l'unique solution dans X_i de

$$\left((A_i U^{n+\frac{i}{a}}, v - u^{n+\frac{i}{a}}) \right) \geq \left(f_i + \frac{\varepsilon}{k} u^{n+\frac{i-1}{a}}, v - u^{n+\frac{i}{a}} \right) \quad \forall v \in X_i \quad |3|$$

J. L. Lions et R. Temam ont montré dans [E], [F] pour des opérateurs A linéaires et sous des hypothèses de coercivité convenables que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\frac{i}{a}} \rightarrow u \text{ dans } V_i \text{ fort} \quad |4|$$

Ces auteurs ont étudié dans [F] par le splitting l'inégalité

$$(\Lambda v, v - u) + (A u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in D(\Lambda) \cap X \quad |5|$$

où $-\Lambda$ est générateur infinitésimal d'un semi groupe G de contractions dans H . Dans une première étape, ils décomposent (5) en deux inégalités, une en A l'autre en Λ , puis ils appliquent le splitting à chacune de ces dernières.

Dans [H], Temam donne une condition suffisante de stabilité et de convergence du schéma (3) pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A u = f \quad \text{avec} \quad (A_i u, u_i) \geq \alpha_i \|u\|_i^2 \quad \alpha_i > 0 \quad |6|$$

(chaque opérateur A_i est coercif sur V_i).

Lemaréchal et Népomiastchy [I] ont obtenu de nombreux résultats numériques pour (6). Lieutaud dans [D] réduit les conditions de coercivité à $(A_i u, u) \geq 0$ (chaque A_i est non négatif).

H. Brézis et M. Sibony ont adapté ces dernières méthodes aux opérateurs non linéaires ([B], [G]) tant pour le problème (1) que pour le problème (2).

Pour le cas des équations couplées, cf. [L], M. Sibony a exposé dans [G] quelques méthodes itératives permettant de résoudre effectivement et sous des hypothèses assez larges les problèmes (1), (2) et (3)_i. Pour le splitting dans les *problèmes de contrôle* régis par une équation aux dérivées partielles, cf. [C].

C. Bardos et M. Sibony ont étudié dans [A] une classe de problèmes d'évolution non linéaires de la forme

$$\Lambda u + A u = f \quad |7|$$

avec A non linéaire et Λ est un opérateur linéaire.

Ils considèrent comme dans [F], mais dans une situation non linéaire, le schéma suivant :

$$A u^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{k} u^{n+\frac{1}{2}} = f + \frac{\varepsilon}{k} u^n \quad |8|$$

$$\Lambda u^{n+1} + \frac{\varepsilon}{k} u^{n+1} = \frac{\varepsilon}{k} u^{n+\frac{1}{2}} \quad |9|$$

sous certaines hypothèses

$$u_{1\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow u \quad \text{et} \quad u_{2\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^n \rightarrow u$$

dans V et H respectivement où V est un espace de Banach et H un espace de Hilbert. Ils appliquent ensuite le splitting-up pour (8) et (9).

Enfin, dans [J], Temam a pu démontrer la convergence de certains procédés de splitting pour les équations de Navier Stokes.

Signalons encore un travail ([K]) de Lions-Temam sur le splitting de certaines équations non linéaires.

10. Méthode de faible approximation et construction de la résolution du problème de Cauchy dans un espace de Banach

10.1 Exemples

Jusqu'à présent, nous avons considéré la méthode à pas fractionnaires comme une méthode de construction de schémas économiques aux différences. Nous allons montrer que l'on peut appliquer la méthode à pas fractionnaires aux équations différentielles.

Dans ce sens on peut parler de la méthode de faible approximation de type spécial. Commençons par l'étude d'exemples simples.

10.1.1 1^{er} exemple

Pour le problème de Cauchy :

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \equiv 1, \quad x(0) = 0 \quad |10.1|$$

on peut appliquer le schéma aux différences à pas fractionnaires :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^n}{\tau} = 1 \end{aligned} \right\} |10.2 a|$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^{n+1} - x^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = 0 \end{aligned} \right\} |10.2 b|$$

$$\left. \begin{aligned} x^0 = 0 \end{aligned} \right\} |10.2 c|$$

Il lui correspond le schéma en pas entiers :

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = 1, \quad x^0 = 0 \quad |10.3|$$

Par conséquent (10.2) donne la solution exacte du problème (10.1). En même temps nous pouvons parler du schéma (10.2) de la manière suivante : au premier demi-pas (10.2 a) on résout l'équation :

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = 1 \quad |10.4 a|$$

et au second demi-pas (10.2 b) on résout l'équation :

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = 0 \quad |10.4 b|$$

En tout nous résolvons l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(\tau, t), \quad x^0 = 0 \quad |10.5|$$

où la fonction $f(\tau, t)$ est définie par :

$$f(\tau, t) = 2, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$$

$$f(\tau, t) = 0, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau$$

Sur la figure (10.1) est indiquée la comparaison de $f(t) \equiv 1$ et $f(\tau, t)$ et de $x(t)$ solution de (10.1) et $x(\tau, t)$ solution de (10.5).

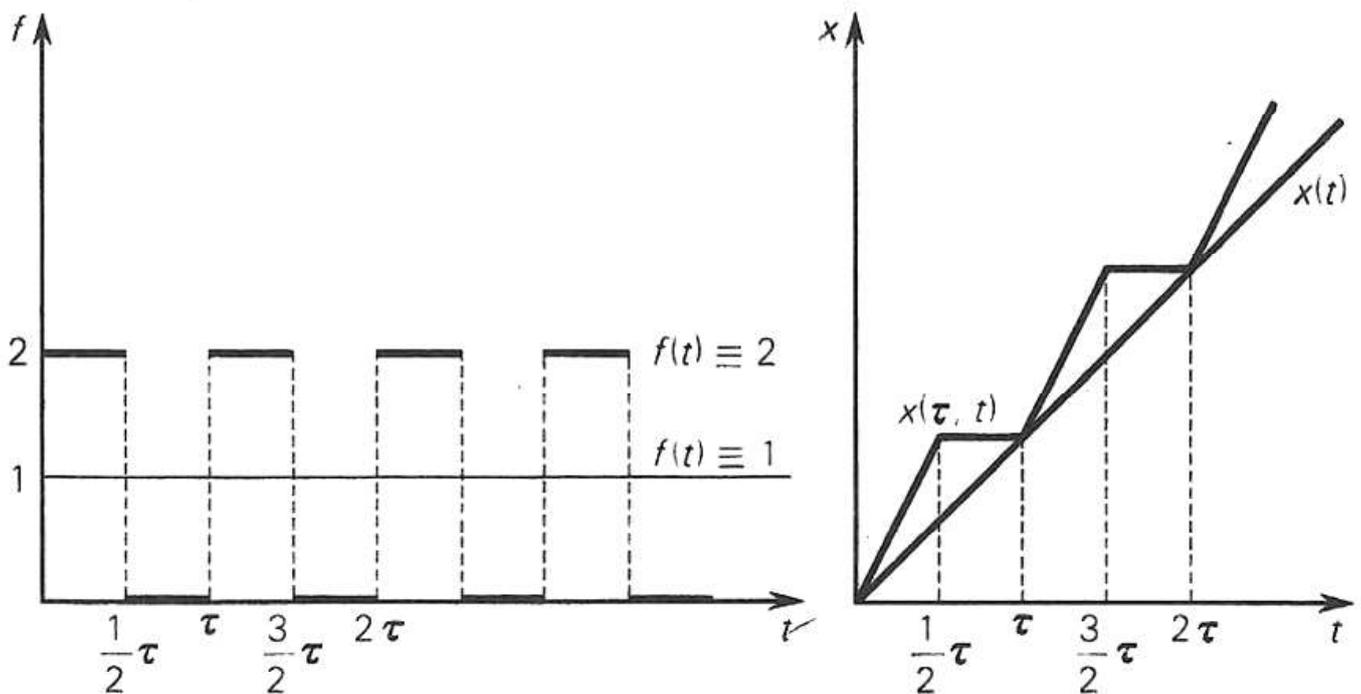


FIGURE 10.1. Comparaison des fonctions $f(t) \equiv 1$ et $f(\tau, t)$ et des solutions $x(t)$ et $x(\tau, t)$ correspondantes.

Il est facile de voir que la fonction $f(\tau, t)$ converge vers la fonction $f(t) \equiv 1$ faiblement, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} [f(\tau, s) - f(s)] ds = 0 \quad \forall t_1, t_2 \quad |10.6|$$

et qu'en même temps la solution de (10.5) converge fortement vers la solution de (10.1).

10.1.2 2^e exemple

Pour le problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0, \quad x(0) = 1, \quad a > 0 \quad |10.7|$$

on peut appliquer le schéma aux différences :

$$\frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^n}{\tau} + ax^n = 0 \quad |10.8 a|$$

$$\frac{x^{n+1} - x^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = 0 \quad |10.8 b|$$

$$x^0 = 1 \quad |10.8 c|$$

De même on peut considérer le schéma (10.8) comme résolvant l'équation :

$$\frac{dx}{dt} + a(\tau, t)x = 0, \quad x(0) = 1 \quad |10.9|$$

où :

$$\left. \begin{aligned} a(\tau, t) &= 2a, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \\ a(\tau, t) &= 0, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau \end{aligned} \right] \quad |10.10|$$

$a(\tau, t)$ approche faiblement $a(t) \equiv a$ dans le sens de l'égalité (10.6) et la solution de (10.9) converge fortement vers la solution de (10.7).

10.1.3 3^e exemple

Étudions le problème de Cauchy pour l'équation du transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \quad |10.11|$$

Sa solution a la forme :

$$u(x_1, x_2, t) = u_0(x_1 - t, x_2 - t) = T_{-1}(t) T_{-2}(t) u_0(x_1, x_2) \quad |10.12|$$

où les opérateurs de translation $T_{-1}(t)$, $T_{-2}(t)$ ont le sens :

$$\begin{aligned} T_{-1}(t) f(x_1, x_2) &= f(x_1 - t, x_2) \\ T_{-2}(t) f(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2 - t) \end{aligned} \quad |10.13|$$

Par conséquent l'opérateur de passage $S(t)$ de l'équation (10.11) a la forme :

$$S(t) = T_{-2}(t) T_{-1}(t) \quad |10.14|$$

Conservant la fonction de données initiales $u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2)$, remplaçons l'équation (10.11) par l'équation avec les coefficients *oscillants* :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f_1(\tau, t) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(\tau, t) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad |10.15|$$

où

$$\begin{aligned} f_1(\tau, t) &= 2, \quad f_2(\tau, t) = 0, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \\ f_1(\tau, t) &= 0, \quad f_2(\tau, t) = 2, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau \end{aligned} \quad |10.16|$$

La solution de (10.15) dans l'intervalle $[n\tau, (n+1)\tau]$ est fortement égale à la solution du système différentiel :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \quad |10.17 a|$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau \quad |10.17 b|$$

L'opérateur de passage de l'équation (10.17 a) est égal à :

$$S_1\left(t + \frac{\tau}{2}, t\right) = S_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = T_{-1}(\tau) \quad |10.18 a|$$

L'opérateur de passage de l'équation (10.17 b) est égal à :

$$S_2\left(t + \frac{\tau}{2}, t\right) = S_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = T_{-2}(\tau) \quad |10.18 b|$$

Par conséquent l'expression de $S_\tau(t + \tau, t) = S_\tau(\tau)$, opérateur de passage de l'équation (10.15), est :

$$S_\tau(\tau) = S_2\left(\frac{\tau}{2}\right) S_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = T_{-2}(\tau) \cdot T_{-1}(\tau) = S(\tau)$$

où : $S(\tau)$ est l'opérateur de passage de l'équation (10.11).

L'équation (10.15) approche (10.11) faiblement et l'opérateur $S_\tau(t, 0)$ de la solution de (10.15) approche l'opérateur de (10.11) fortement, coïncidant avec lui pour $t = n\tau$.

10.1.4 4^e exemple

Pour l'équation de la chaleur :
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad |10.19|$$

construisons l'équation suivante avec des coefficients oscillants :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1(\tau, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2(\tau, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad |10.20|$$

où :

$$a_1(\tau, t) = 2, \quad a_2(\tau, t) = 0, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \quad |10.21|$$

$$a_1(\tau, t) = 0, \quad a_2(\tau, t) = 2, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau$$

On établit de nouveau sans difficulté la relation :

$$S(\tau) = S_2\left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot S_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = S_\tau(\tau) \quad |10.22|$$

où $S(\tau)$ est l'opérateur de passage de l'équation (10.19), $S_i(\tau)$ est l'opérateur de passage des équations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2 \quad |10.23|$$

$S_\tau(\tau)$ est l'opérateur de passage de l'équation (10.20)¹.

Introduisons maintenant la notion d'approximation faible pour les opérateurs différentiels de structure générale.

10.2 Approximation faible des systèmes d'équations différentielles

Commençons par la définition de l'approximation faible d'une fonction.

DÉFINITIONS

① Une famille de fonctions $f_\tau(x, t)$ *approche faiblement* par rapport à t dans l'intervalle $[0, T]$ la fonction $f(x, t)$ si :

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_\tau(x, s) - f(x, s)] ds = \delta(x, t_1, t_2, \tau) \quad |10.24|$$

et

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\delta\| = 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]$$

1. Une interprétation analogue des schémas de désintégration comme conséquence de l'intégration approchée d'équations homogènes a été donnée dans les travaux de A. A. SAMARSKY [84], [91]. L'ouvrage de KELLOGG [92] donne une généralisation du schéma à directions alternées pour les opérateurs différentiels spatiaux.

② Une famille d'opérateurs différentiels linéaires $\mathcal{L}_\tau(t)$ *approche faiblement* par rapport à t l'opérateur $\mathcal{L}(t)$ si l'approximation faible a lieu pour les coefficients. Il est clair que l'on peut introduire une définition de l'approximation analogue pour chacune des variables d'espace, cependant nous nous limiterons ici à l'étude de la faible approximation par rapport à t . Dans la suite, pour simplifier, nous parlerons des opérateurs \mathcal{L}_τ et non des familles d'opérateurs.

Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u + f \quad |10.25|$$

un système du type étudié dans (ch. 1.1) pour lequel est posé le problème de Cauchy, bien posé au sens du chapitre 1.1 :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad |10.25'|$$

Soit

$$\mathcal{L} = \sum_{s=1}^p \mathcal{L}_s \quad |10.26|$$

une représentation de \mathcal{L} sous la forme d'une somme d'opérateurs de structure plus simple que \mathcal{L} .

Examinons l'opérateur :

$$\mathcal{L}_\tau = \sum_{s=1}^p \alpha_s(\tau, t) \mathcal{L}_s \quad |10.27|$$

où les fonctions $\alpha_s(\tau, t)$ se déterminent de la manière suivante :

$$\alpha_s(\tau, t) = p \delta_{si} \quad |10.28|$$

si :

$$t \in \left[n\tau + \frac{i-1}{p}\tau, n\tau + \frac{i}{p}\tau \right] \quad |10.29|$$

ici :

$$\delta_{si} \begin{cases} = 1, & i = s \\ = 0, & i \neq s \end{cases} \quad i, s = 1 \dots p \quad |10.30|$$

Il est facile de voir que l'opérateur \mathcal{L}_τ *approche faiblement* l'opérateur \mathcal{L} . Parallèlement au système (10.25) examinons le système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_\tau u + f_\tau \quad |10.31|$$

où la fonction f_τ peut approcher f soit faiblement, soit fortement (en particulier coïncider), et l'opérateur \mathcal{L} se détermine par l'égalité (10.27).

Que faut-il comprendre par la solution $u = u_\tau$ du problème de Cauchy :

$$u_\tau(x, 0) = u_0(x) \quad |10.31'|$$

pour l'équation (10.31)?

Soit $u_\tau(x, t)$ la solution du problème de Cauchy pour l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \mathcal{L}_1 u$$

dans l'intervalle $0 \leq t \leq \frac{\tau}{p}$ avec les données initiales $u(x, 0) = u_0(x)$. Définissons

$u_\tau(x, t)$ dans l'intervalle $\frac{\tau}{p} \leq t \leq \frac{2\tau}{p}$ comme la solution du problème de Cauchy pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = p \mathcal{L}_2 u$ avec les données initiales $u\left(x, \frac{\tau}{p}\right) = u_\tau\left(x, \frac{\tau}{p}\right)$.

Continuant de façon analogue, définissons $u_\tau(x, t)$ dans l'intervalle $\frac{p-1}{p}\tau \leq t \leq \tau$ comme la solution du problème de Cauchy pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = p \mathcal{L}_p u$ avec les données initiales $u\left(x, \frac{(p-1)\tau}{p}\right) = u_\tau\left(x, \frac{(p-1)\tau}{p}\right)$.

Après quoi, le processus de définition des fonctions u_τ se répète. La fonction $u_\tau(x, t)$, construite de cette façon, est la solution du problème de Cauchy (10.31), (10.31').

Introduisons les notations :

$S(t_2, t_1)$ — opérateur de passage de l'équation (10.25).

$S_\tau(t_2, t_1)$ — opérateur de passage de l'équation (10.31).

$S_i(t_2, t_1)$ — opérateur de passage de l'équation : $\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_i u$, $i = 1 \dots p$

Alors, d'après la construction même de la solution u_τ , on a la relation suivante :

$$S_\tau(t + \tau, t) = S_p\left(t + \tau, t + \frac{p-1}{p}\tau\right) \times S_{p-1}\left(t + \frac{p-1}{p}\tau, t + \frac{p-2}{p}\tau\right) \dots S_1\left(t + \frac{\tau}{p}, t\right) \quad |10.32|$$

A cause de (10.32), nous pouvons appeler le système (10.31) *factorisé* ou *désintégré*. Nous cherchons à déterminer les propriétés des opérateurs $S_\tau(t_2, t_1)$, $S_i(t_2, t_1)$ et $S(t_2, t_1)$.

Introduisons une série de notions préliminaires.

Définissons d'abord le *système prolongé*.

L'opérateur \mathcal{L} a la forme : $\mathcal{L} = \sum_a a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_m} D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m}$ |10.33|

Introduisons le vecteur u dont les composantes sont les grandeurs :

$$p^\alpha = p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_m} = D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} u = D^\alpha u \quad |10.34|$$

où les combinaisons $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_m)$ sont prises dans la somme (10.33) qui comprend **obligatoirement** la combinaison $(0, \dots, 0)$ qui correspond au vecteur de départ $u = p^0 \dots p^0$.

Appliquons à l'équation (10.25) l'opérateur D^α :

$$D^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (D^\alpha u) = \frac{\partial}{\partial t} p^\alpha = D^\alpha (\mathcal{L} u) + D^\alpha f \quad |10.34'|$$

Utilisant la loi de différentiation : $D_i (ap^\beta) = (D_i a) p^\beta + a (D_i p^\beta)$
 où a est un certain coefficient matriciel et $p^\beta = p^{\beta_1 \dots \beta_m}$, mettons (10.34') sous la
 forme :

$$\frac{\partial p^\alpha}{\partial t} = I^\alpha u + D^\alpha f \quad |10.35|$$

où I^α est un certain opérateur différentiel.

Groupant les égalités (10.35) (les p sont les composantes de u^1), nous arrivons au
 système :

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} = \mathcal{L}^1 u + f \quad |10.36|$$

Le système (10.36) est le *premier système prolongé* correspondant au système (10.25)
 ou simplement le *premier système prolongé de (10.25)*.

Montrons sur un exemple simple comment se note un système prolongé. Examinons
 l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_a a_a \frac{\partial u}{\partial x^a} = 0, \quad a = 1, 2 \quad |10.37|$$

Posant $p^i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, différenciant (10.37) par rapport à x^i , nous obtenons :

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial a_a}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^a} + \sum_a a_a \frac{\partial p^i}{\partial x^a} = 0, \quad i, a = 1, 2 \quad |10.38|$$

Introduisant le vecteur $u^1 = (u, p^1, p^2)$, on peut noter les équations (10.38), (10.37)
 sous la forme :

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} = \mathcal{L}^1 u^1 \quad |10.39|$$

avec $\mathcal{L}^1 = - \left\| \begin{array}{ccc} \sum_a a_a \frac{\partial}{\partial x^a} & 0 & 0 \\ \sum_a \frac{\partial a_a}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^a} & \sum_a a_a \frac{\partial}{\partial x^a} & 0 \\ \sum_a \frac{\partial a_a}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^a} & 0 & \sum_a a_a \frac{\partial}{\partial x^a} \end{array} \right\| \quad |10.40|$

Dans le cas particulier où les coefficients a_a sont constants, n'importe quelle dérivée p^a
 vérifie la même équation que la fonction u , et l'opérateur \mathcal{L}^1 a la forme diagonale :

$$\mathcal{L}^1 = \left\| \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L} \end{array} \right\| \quad |10.41|$$

où l'opérateur matriciel (10.41) opère dans l'espace des composantes du vecteur u .
 De façon analogue, formant les vecteurs $u^2 = \{p^{\alpha+\beta}\}$, $u^3 = \{p^{\alpha+\beta+\gamma}\}$, ..., où $\beta, \gamma \dots$ parcourent les mêmes combinaisons que α , nous obtenons les seconds, troisièmes, etc., systèmes prolongés.

Nous noterons le $k^{i\text{eme}}$ système prolongé sous la forme :

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} = \mathfrak{L}^k u^k + f^k \quad |10.42|$$

On voit facilement qu'à la représentation (10.26) correspond la représentation :

$$\mathfrak{L}^k = \sum_{i=1}^p \mathfrak{L}_i^k \quad |10.43|$$

et à l'opérateur \mathfrak{L}_τ correspond l'opérateur :

$$\mathfrak{L}_\tau^k = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathfrak{L}_i^k \quad |10.44|$$

Par conséquent, parallèlement au système (10.31), nous allons étudier le système prolongé :

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} = \mathfrak{L}_\tau^k u^k + f_\tau^k \quad |10.45|$$

Nous allons désigner par :

$S^k(t_2, t_1)$ — l'opérateur de passage de l'équation (10.42)

$S_\tau^k(t_2, t_1)$ — l'opérateur de passage de l'équation (10.45)

$S_i^k(t_2, t_1)$ — l'opérateur de passage de l'équation $\frac{1}{p} \frac{\partial u^k}{\partial t} = \mathfrak{L}_i^k u^k$

De nouveau, on a la relation :

$$\begin{aligned} & S_\tau^k(t + \tau, t) \\ &= S_p^k\left(t + \tau, t + \frac{p-1}{p}\tau\right) S_{p-1}^k\left(t + \frac{p-1}{p}\tau, t + \frac{p-2}{p}\tau\right) \dots S_1^k\left(t + \frac{\tau}{p}, \tau\right) \end{aligned} \quad |10.46|$$

L'égalité (10.46) peut être formulée sous la forme :

la factorisation d'un système prolongé est un prolongement factorisé. Entre d'autres termes, les opérations de prolongement et de factorisation sont commutatives.

Au système prolongé correspond aussi le problème de Cauchy prolongé.

Pour cela, il suffit de poser :

$$p_0^\alpha = D^\alpha u_0, \quad p_0^{\alpha+\beta} = D^{\alpha+\beta} u_0, \quad \text{etc.} \quad |10.47|$$

Nous allons désigner les problèmes de Cauchy pour les systèmes (10.25), (10.31) et leurs prolongements respectivement par les lettres :

$$I, I_\tau, I^k, I_\tau^k$$

Nous allons supposer que les problèmes I, I_τ sont définis dans le même espace de Banach \mathcal{B} et que les problèmes I^k, I_τ^k correspondants sont définis dans les espaces de Banach correspondants \mathcal{B}_k .

Par exemple, la norme de \mathcal{B}_k peut être définie de la façon suivante :

$$\left\| \begin{matrix} k \\ u \end{matrix} \right\|_{\mathcal{B}_k}^2 = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \left\| p^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} \right\|_{\mathcal{B}}^2$$

Donnons maintenant une série de propriétés des solutions des systèmes uniformément corrects.

LEMME 1

Si le système (10.25) est uniformément correct, alors la solution $u(t)$ est uniformément continue.

Démonstration

En vertu de la continuité de l'opérateur $S(t + \tau, t)$, $u(t)$ est continue par rapport à t , $\forall t \in [0, T]$. D'après le théorème de Cantor, $u(t)$ est uniformément continue.

LEMME 2

Si a) les problèmes I, I^1 sont uniformément corrects;
 b) les coefficients a_α sont uniformément continus par rapport à t ;
 alors les expressions $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\mathcal{L} u$ ont un sens, sont uniformément continues par rapport à t et l'on a l'égalité : $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$.

Démonstration

Le vecteur $u^1(t) = \{ p^\alpha(t) \}$ a un sens pour un $t \in [0, T]$ quelconque, par conséquent l'expression $q(t) = \mathcal{L} u = \sum_{\alpha} a_\alpha(t) p^\alpha(t)$ a aussi un sens pour $t \in [0, T]$. D'après le lemme 1, $p^\alpha(t)$ est uniformément continue comme composante du vecteur $u^1(t)$ uniformément continu. Tenant compte de la condition b) du lemme 2, nous voyons que $\mathcal{L} u$ est uniformément continue.

D'après la définition de la solution généralisée, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varepsilon, t) = u(t)$$

où la limite a lieu uniformément par rapport à t dans \mathcal{B}_1 et $u(\varepsilon, t)$ est la solution régulière de I appartenant à \mathcal{B}_1 . Pour eux sont vérifiées les relations :

$$\frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t} = \mathcal{L}(t) u(\varepsilon, t) \quad |10.48 a|$$

$$u(\varepsilon, t + \tau) - u(\varepsilon, t) = \int_t^{t+\tau} \mathcal{L}(\theta) u(\varepsilon, \theta) d\theta \quad |10.48 b|$$

Passant dans l'égalité (10.48 b) à la limite avec la norme $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, posons :

$$u(t + \tau) - u(t) = \int_t^{t+\tau} \mathcal{L}(\theta) u(\theta) d\theta \quad |10.49|$$

Comme $\mathcal{L}(t) \cdot u(t)$ est uniformément continue, on a :

$$\frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} \rightarrow \frac{\partial u(t)}{\partial t} = \mathcal{L}(t) u(t)$$

et $\frac{\partial u}{\partial t}$ est uniformément continue. Le lemme est démontré.

LEMME 3

Si a) I, I^1 sont uniformément corrects,

b) $u_0 \in \mathcal{B}_1, f(t) \in \mathcal{B}_1$ et sont uniformément continus par rapport à t ,
alors la formule :

$$u(t) = S(t, 0) u_0 + \int_0^t S(t, \theta) f(\theta) d\theta \quad |10.50|$$

donne la solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u + f \quad |10.51|$$

avec les données initiales $u(0) = u_0$. |10.52|

Démonstration

Étudions d'abord les propriétés de la fonction :

$$F(t, \theta) = S(t, \theta) f(\theta) \quad |10.53|$$

Pour θ fixé, $F(t, \theta)$ est la solution $u(t)$ du système I :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$$

avec les données initiales $u(\theta) = f(\theta)$.

D'après le lemme 1, $F(t, \theta)$ est uniformément continu par rapport à t dans \mathcal{B} et dans \mathcal{B}_1 .

Examinons dans la norme \mathcal{B} la différence :

$$\begin{aligned} F(t, \theta + h) - F(t, \theta) &= S(t, \theta + h)f(\theta + h) - S(t, \theta)f(\theta) \\ &= S(t, \theta + h)[f(\theta + h) - f(\theta)] + [S(t, \theta + h) - S(t, \theta)]f(\theta) \\ &= S(t, \theta + h)[f(\theta + h) - f(\theta)] + S(t, \theta + h)[E - S(\theta + h)]f(\theta) \quad |10.54| \end{aligned}$$

Le premier terme de (10.54) tend vers 0 pour $h \rightarrow 0$ uniformément par rapport à θ en vertu de l'uniforme continuité de $f(\theta)$.

Estimons le second terme. On a :

$$[E - S(\theta + h, \theta)]f(\theta) = -[F(\theta + h, \theta) - f(\theta)]$$

D'après les propriétés de $F(t, \theta)$, ce terme tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$, quel que soit θ . Par conséquent, la fonction $F(t, \theta)$ est continue par rapport à θ , donc uniformément continue dans le segment $[0, t]$, et l'intégrale

$$F(t) = \int_0^t F(t, \theta) d\theta$$

a un sens dans \mathcal{B} . De façon analogue, on montre qu'elle a un sens dans \mathcal{B}_1 .

Estimons la différence :

$$\begin{aligned} u(t + \tau) - u(t) &= [S(t + \tau, 0) - S(t, 0)]u_0 + \int_t^{t+\tau} S(t + \tau) f(\theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^t [S(t + \tau, \theta) - S(t, \theta)]f(\theta) d\theta = [S(t + \tau, t) - E]S(t, 0)u_0 \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta) d\theta + \int_0^t [S(t + \tau, t) - E] \cdot S(t, \theta)f(\theta) d\theta \quad |10.55| \end{aligned}$$

Utilisant (10.50), mettons (10.55) sous la forme :

$$\begin{aligned} u(t + \tau) - u(t) &= [S(t + \tau, t) - E] \left[u(t) - \int_0^t S(t, \theta)f(\theta) d\theta \right] \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta) d\theta + \int_0^t [S(t + \tau, t) - E] S(t, \theta)f(\theta) d\theta \\ &= [S(t + \tau, t) - E] u(t) + \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^t [S(t + \tau, t) - E] S(t, \theta)f(\theta) d\theta - [S(t + \tau, t) - E] \int_0^t S(t, \theta)f(\theta) d\theta \quad |10.56| \end{aligned}$$

Les deux derniers termes de (10.56) s'annulent et, après avoir divisé par τ , nous obtenons :

$$\frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} = \frac{S(t + \tau, t) - E}{\tau} u(t) + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta) d\theta \quad |10.57|$$

D'après les conditions du lemme 3, $F(t, \theta) \in \mathfrak{B}_1$, $F(t) \in \mathfrak{B}_1$ et par conséquent :

$$u(t) = S(t, 0) \cdot u(0) + F(t) \in \mathfrak{B}_1$$

puisque $u(0) \in \mathfrak{B}_1$.

Mais dans ce cas :

$$\frac{S(t + \tau, t) - E}{\tau} u(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathfrak{L}(\theta) U(\theta) d\theta \quad |10.58|$$

où $U(\theta)$ est la solution du problème de Cauchy :

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = \mathfrak{L}(\theta) U(\theta), \quad U(\theta) = u(\theta) \text{ pour } t \leq \theta \leq t + \tau \quad |10.59|$$

Comme $\mathfrak{L}(\theta) u(\theta)$, $S(t + \tau, \theta) f(\theta)$ sont uniformément continus, appliquant le théorème de la moyenne et passant dans l'égalité (10.57) à la limite $\tau \rightarrow 0$, nous trouvons :

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \mathfrak{L}(t) u(t) + f(t)$$

En vertu de la formule (10.50) les conditions initiales sont satisfaites et le lemme est démontré.

La formule (10.50) conserve son sens même quand $u(0) \in \mathfrak{B}$, $f(\theta) \in \mathfrak{B}$ et quand le problème I est uniformément correct. Dans ce cas, elle peut être prise comme base de définition de la solution généralisée des problèmes (10.51), (10.52).

Le lemme 3 entraîne la conséquence suivante :

— Si le problème I est bien posé, alors la solution des problèmes (10.51), (10.52) dépend continûment du second membre f (correcte pour le second membre).

Cette affirmation découle directement de l'estimation :

$$\|u(t)\| \leq \|S(t, 0)\| \cdot \|u_0\| + \int_0^t \|S(t, \theta)\| \cdot \|f(\theta)\| d\theta \leq e^{at} \|u_0\| + \int_0^t e^{a(t-\theta)} \|f(\theta)\| d\theta$$

Dans la suite nous prendrons la formule (10.50) comme définition de la solution des problèmes (10.51), (10.52) au sens du lemme 3.

Les lemmes 1, 2, 3 sont également vrais pour le système I .

THÉORÈME 1

- Si :
- a) I_τ, I_τ^1 sont uniformément corrects dans $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$.
 - b) I_τ est correct pour le second membre.
 - c) $\mathcal{L}_t u$ est uniformément continue par rapport à t pour la solution $u(t)$ de problème I .
 - d) $u_0 \in \mathcal{B}_1$.

alors $u(t)$ est la solution unique du problème I satisfaisant les conditions c) d) et $u(t)$ converge fortement pour $\tau \rightarrow 0$ vers $u(t)$, la convergence étant uniforme par rapport à t .

En d'autres termes, si le système factorisé de départ et le premier système prolongé sont corrects (a, b) et si la solution du système de départ (10.25) est suffisamment régulière, alors la solution du système de départ (10.25) est unique et elle converge vers la solution du système factorisé.

Démonstration

Soit $u(t)$ la solution du problème I avec les conditions initiales $u_0 \in \mathcal{B}_1$, et soit $u_\tau(t)$ la solution du problème I_τ avec la même condition initiale u_0 .

La fonction :

$$v(t) = u_\tau(t) - u(t) \quad |10.60|$$

est la solution du problème :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{L}_\tau v + (\mathcal{L}_\tau - \mathcal{L}) u(t), \quad v(0) = 0 \quad |10.61|$$

En vertu de b) et du lemme 3, $v(t)$ se calcule alors par la formule :

$$v(t) = \int_0^t S_\tau(t, \theta) (\mathcal{L}_\tau - \mathcal{L}) u(\theta) d\theta = \sum_{i=1}^p v_i(t) \quad |10.62|$$

avec :

$$v_i(t) = \int_0^t S_\tau(t, \theta) \cdot \varepsilon_i(\tau, \theta) \varphi_i(\theta) d\theta \quad |10.63|$$

et $\varepsilon_i(\tau, \theta) = \alpha_i(\tau, \theta) - 1, \quad \varphi_i(\theta) = \mathcal{L}_i(\theta) u(\theta)$

Soit $t = n\tau + \frac{i-1}{p}\tau + \eta, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{\tau}{p}$

1. Ce paragraphe est issu des travaux de G. V. DEMIDOV et de l'auteur [88, 89].

Alors :
$$\int_0^t = \int_0^{n\tau} + \int_{n\tau}^{n\tau + \frac{(i-1)\tau}{p} + \eta}$$

En vertu de l'uniforme correction du problème I_τ , la deuxième intégrale est d'ordre $0(\tau)$ uniformément par rapport à t .

Par conséquent il suffit d'estimer l'intégrale $v_i(t)$ pour $t = n\tau$. Pour v_i nous obtenons l'expression :

$$\begin{aligned} v_i(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} S_\tau(t, \theta) \varepsilon_i(\tau, \theta) \varphi_i(\theta) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau}^{(k+\frac{j}{p})\tau} S_\tau(t, \theta) \times \varepsilon_i(\tau, \theta) \varphi_i(\theta) d\theta \quad |10.64| \end{aligned}$$

Tenant compte de (10.30) et de (10.65) on a pour ε_i l'expression :

$$\varepsilon_i(\tau, \theta) = p \delta_{ij} - 1, \quad \theta \in \left[\left(k + \frac{j-1}{p} \right) \tau, \left(k + \frac{j}{p} \right) \tau \right] \quad |10.65|$$

D'où pour $v_i(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} v_i(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau}^{(k+\frac{j}{p})\tau} \left[S_\tau \left(t, \theta + \frac{i-j}{p} \tau \right) \varphi_i \left(\theta + \frac{i-j}{p} \tau \right) \right. \\ &\quad \left. - S_\tau(t, \theta) \varphi_i(\theta) \right] d\theta \quad |10.66| \end{aligned}$$

Par conséquent, l'estimation $v_i(t)$ converge vers l'estimation d'une expression de la forme :

$$\int_a^{a+h_1} [S_\tau(t, \theta + h_2) \varphi(\theta + h_2) - S_\tau(t, \theta) \varphi(\theta)] d\theta \quad |10.67|$$

pour l'opérateur $S_\tau(t, \theta)$ uniformément correct et la fonction $\varphi(\theta)$ uniformément continue par rapport à t .

Mettons (10.67) sous la forme d'une somme :

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h_1} [S_\tau(t, \theta + h_2) - S_\tau(t, \theta)] \varphi(\theta) d\theta \\ + \int_a^{a+h_1} S_\tau(t, \theta + h_2) [\varphi(\theta + h_2) - \varphi(\theta)] d\theta \quad |10.68| \end{aligned}$$

En vertu de l'uniforme correction de $S(t, \theta)$ et de l'uniforme continuité de $\varphi(\theta)$ le second terme de (10.68) est d'ordre $h_1 \alpha(h_2)$ où $\alpha(h_2) \rightarrow 0$ pour $h_2 \rightarrow 0$ et l'expression :

$$\mathcal{J}_2 \varphi_i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{k+\frac{j-1}{p}\tau}^{(k+\frac{j}{p})\tau} S_\tau \left(t, \theta + \frac{i-j}{p} \tau \right) \left[\varphi_i \left(\theta + \frac{i-j}{p} \tau \right) - \varphi_i(\theta) \right] d\theta$$

a en norme l'ordre $0(\tau)$.

Estimons le premier terme de la somme (10.68). Supposons h_2 positif et utilisant la relation :

$$S_\tau(t, \theta) = S_\tau(t, \theta + h_2) \cdot S_\tau(\theta + h_2, \theta) \quad |10.69|$$

On peut le mettre sous la forme :

$$\int_a^{a+h_1} S_\tau(t, \theta + h_2) [E - S_\tau(\theta + h_2, \theta)] \varphi(\theta) d\theta \quad |10.70|$$

$$\text{Examinons l'expression : } [S_\tau(\theta + h_2, \theta) - E] \varphi(\theta) \quad |10.71|$$

Soit $U(t)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{L}_\tau U, \quad U(\theta) = \varphi(\theta)$$

Alors (10.71) n'est rien d'autre que : $U(\theta + h_2) - U(\theta)$.

Si $\varphi(\theta) \in \mathcal{B}_1$, alors on a l'égalité :

$$U(\theta + h_2) - U(\theta) = \int_\theta^{\theta+h_2} \mathcal{L}_\tau U dt$$

en vertu de la correction de I , $\mathcal{L}_\tau U$ a un sens, est borné, et :

$$\int_\theta^{\theta+h_2} \mathcal{L}_\tau \varphi d\theta = 0(h_2) \quad \text{uniformément par rapport à } t \text{ et } \tau.$$

$$\text{Par conséquent l'intégrale : } \int_a^{a+h_1} [S_\tau(t, \theta + h_2) - S(t, \theta)] \varphi(\theta) d\theta$$

pour $\varphi(\theta) \in \mathcal{B}_1$ a aussi l'ordre $0(h_1 h_2)$, et

$$\mathcal{J}_1 \varphi_i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau}^{(k+\frac{j}{p})\tau} \left[S_\tau \left(t, \theta + \frac{i-j}{p} \tau \right) - S(t, \theta) \right] \varphi_i(\theta) d\theta \quad |10.72|$$

a également en norme l'ordre $0(\tau)$.

On peut étudier \mathcal{J}_1 comme une famille d'opérateurs $\mathcal{J}_1(\tau)$, opérant sur la fonction $u(t)$.

Comme $\| \mathcal{J}_1(\tau) \varphi_i \| \leq C(T) \cdot \max \| \mathcal{L}_i u \|$ |10.73|

pour $u \in \mathcal{B}_1$, $\varphi_i \in \mathcal{B}_0$, la famille $\mathcal{J}_1(\tau)$ est uniformément bornée. Comme pour $u \in \mathcal{B}_2$, $\| \mathcal{J}_1(\tau) \varphi \| \rightarrow 0$, d'après le théorème de Banach-Steinhaus $\mathcal{J}_1(\tau)$ converge vers l'opérateur nul, c'est-à-dire que pour $\varphi_i \in \mathcal{B}_0$, $\mathcal{J}_1 \rightarrow 0$ pour $\tau \rightarrow 0$.

Tenant compte du fait que $v = \sum_{i=1}^p (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \varphi_i$, nous arrivons à l'estimation définitive :

$$\boxed{\lim_{\tau \rightarrow 0} \| v(t) \| = 0} \quad |10.74|$$

Le théorème est démontré.

Remarquons que pour les équations à coefficients constants le fait que le problème I soit bien posé est suffisant et les conditions du théorème 1 se ramènent à la suffisante régularité des conditions initiales.

Ceci est vrai naturellement pour toutes les équations pour lesquelles la correction du système prolongé est une conséquence de la correction du système de départ.

Le théorème 1 démontre la forte convergence de la solution $u_\tau(t)$ du système factorisé (10.31) avec des coefficients oscillants approchant faiblement le système, vers la solution $u(t)$ du système (10.25). Cependant, nous pouvons démontrer une affirmation plus forte : de l'existence d'une solution du système factorisé (10.31) nous pouvons déduire l'existence d'une solution et la correction du système (10.25) et donner une définition constructive de l'opérateur de passage $S(t_2, t_1)$ à partir de l'opérateur $S_\tau(t_2, t_1)$.

Cette affirmation est pleinement fondée, puisque l'opérateur $S_\tau(t_2, t_1)$ se présente sous la forme d'un produit (10.32) d'opérateurs de structure plus simple.

THÉORÈME 2

Si les problèmes $I_\tau, I_\tau^1, I_\tau^2$ sont uniformément corrects, alors :

a) pour $\tau \rightarrow 0$, $u_\tau(t)$ converge uniformément par rapport à t vers la fonction $u(t) = S(t, 0) u_0$;

b) l'opérateur $S(t_2, t_1)$ est uniformément correct.

Démonstration

D'après les hypothèses du théorème, on a l'estimation suivante :

$$\| S_\tau^k(t_2, t_1) \| \leq \alpha^{(t_2 - t_1)}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad k = 0, 1, 2 \quad |10.75|$$

où la constante α ne dépend pas de τ, t_1, t_2 .

Soit $u_{\tau_1}(t), u_{\tau_2}(t)$ les solutions des problèmes I_τ correspondant à $\tau = \tau_1, \tau = \tau_2$ pour $u_0 \in \mathcal{B}_2$.

$$\text{La fonction } v(t) = u_{\tau_2}(t) - u_{\tau_1}(t) \quad |10.76|$$

est solution du problème :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \mathfrak{L}_{\tau_1} v + (\mathfrak{L}_{\tau_2} - \mathfrak{L}_{\tau_1}) u_{\tau_2}, \quad 0 \leq t \leq T \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \quad |10.77|$$

Pour $v(t)$ on a la représentation :

$$v(t) = \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) (\mathfrak{L}_{\tau_2} - \mathfrak{L}_{\tau_1}) u_{\tau_2}(\theta) d\theta \quad |10.78|$$

Mettons $v(t)$ sous le forme : $v(t) = I_1 + I_2$

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad I_1 &= \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) [\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_{\tau_1}] u_{\tau_2}(\theta) d\theta \\ I_2 &= \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) [\mathfrak{L}_{\tau_2} - \mathfrak{L}] u_{\tau_2}(\theta) d\theta \end{aligned} \quad |10.79|$$

Estimons la norme de I_2 (la norme de I_1 s'estime de façon analogue).

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{i=1}^p \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) \varepsilon_i \varphi_i(\theta) d\theta \\ \varepsilon_i &= \alpha_i(\tau_2, t) - 1, \quad \varphi_i = \mathfrak{L}_i u_{\tau_2} \end{aligned} \quad |10.80|$$

Comme dans le théorème 1, on prendra $t = n \tau_2$, la partie négligée étant d'ordre $0(\tau_2)$.

Mettant I_2 sous une forme analogue à celle du théorème 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{n-1} \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau_2}^{(k+\frac{p}{j})\tau_2} \left[S_{\tau_1}\left(t, \theta + \frac{i-j}{p}\tau_2\right) \cdot \varphi_i\left(\theta + \frac{i-j}{p}\tau_2\right) \right. \\ &\quad \left. - S_{\tau_1}(t, \theta) \varphi_i(\theta) \right] d\theta \end{aligned} \quad |10.81|$$

Utilisant le fait que $\varphi_i \in \mathfrak{B}_1$ et effectuant des estimations analogues à celles du théorème 1, nous trouvons :

$$\|I_1\| = \alpha(\tau_1), \quad \|I_2\| = \alpha(\tau_2), \quad \|v(t)\| \leq \alpha(\tau_1) + \alpha(\tau_2) \quad |10.82|$$

Ceci indique que la suite $u_\tau(t)$ est fondamentale et converge fortement pour $\tau \rightarrow 0$ vers $u(t) \in \mathfrak{B}$, d'ailleurs la convergence est uniforme par rapport à t .

Entre d'autres termes, la suite de fonctions $S_\tau(t, 0) u(0)$ converge pour $u(0) \in \mathfrak{B}_2$. Comme \mathfrak{B}_2 est dense dans \mathfrak{B} et S_τ est borné dans l'ensemble considéré, les hypothèses

du théorème de Banach-Steinhaus sont vérifiées. En vertu de ce théorème (cf. [72]) il existe un opérateur limite :

$$S(t_2, t_1) = \lim_{\tau \rightarrow 0} S_\tau(t_2, t_1)$$

En vertu de l'uniforme correction des opérateurs $S_\tau(t_2, t_1)$, l'opérateur $S(t_2, t_1)$ remplit la condition d'uniforme correction :

$$\| S(t_2, t_1) \| \leq e^{\alpha(t_2-t_1)} \text{ avec le même exposant.}$$

Montrons que la condition de composition (condition des semi-groupes) est satisfaite :

$$S(t_3, t_1) = S(t_3, t_2) \cdot S(t_2, t_1) \quad |10.83|$$

On a l'égalité suivante :

$$S(t_3, t_2) \cdot S(t_2, t_1) - S(t_3, t_1) = [S_\tau(t_3, t_1) - S(t_3, t_1)] + [S(t_3, t_2) - S_\tau(t_3, t_2)] \\ \times S_\tau(t_2, t_1) + S(t_3, t_2) \times [S(t_2, t_1) - S_\tau(t_2, t_1)] \quad |10.84|$$

Passant dans (10.84) à la limite $\tau \rightarrow 0$, nous obtenons l'égalité désirée (10.83).

Démontrons, enfin, que la condition de contiguïté continue est vérifiée.

On a l'estimation suivante :

$$\| u(t) - u(0) \| \leq \| u(t) - u_\tau(t) \| + \| u_\tau(t) - u(0) \| \quad |10.85|$$

Comme pour $\tau \rightarrow 0$, $\| u(t) - u_\tau(t) \|$ tend uniformément par rapport à t vers 0, choisissons τ_0 suffisamment petit pour que :

$$\| u(t) - u_\tau(t) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t, \text{ pour } \tau \leq \tau_0. \quad |10.86|$$

Pour τ fixé, choisissons t_0 suffisamment petit pour que :

$$\| u_\tau(t) - u(0) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } t \leq t_0 \quad |10.87|$$

De (10.85), (10.86), (10.87), on tire :

$$\boxed{\| u(t) - u(0) \| < \varepsilon} \quad \text{pour } t \leq t_0 \quad |10.88|$$

Le théorème 2 est démontré.

THÉORÈME 3

Si les problèmes I_τ^k ($k = 0, 1, 2, 3$) sont bien posés, alors, pour un $u(0) \in \mathcal{B}_1$ quelconque, on a $u_\tau^k(t) \rightarrow u^k(t)$, et la fonction limite $u(t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u$$

et les conditions initiales.

Démonstration

Considérant dans \mathcal{B}_1 le problème I comme problème de départ, nous allons démontrer, de façon tout à fait analogue à celle du théorème 2, que $\overline{u_\tau}$ converge vers u .

Montrons que $u(t)$ admet une dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ et vérifie l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$.

Examinons la fonction moyenne :

$$\overline{u_\tau}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} u_\tau(\theta) d\theta \quad |10.89|$$

Pour $\tau \rightarrow 0$, la fonction $\overline{u}(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément par rapport à t .

$$\begin{aligned} \text{En effet : } u(t) - \overline{u_\tau}(t) &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [u(t) - u_\tau(\theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [u(t) - u(\theta)] d\theta + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [u(\theta) - u_\tau(\theta)] d\theta \end{aligned} \quad |10.90|$$

La fonction $u(t)$ est uniformément continue sur le segment $0 \leq t \leq T$ parce qu'elle est une limite uniforme de fonctions uniformément continues $u_\tau(t)$.

Par conséquent le premier terme de (10.90) tend vers 0 uniformément par rapport à t quand $\tau \rightarrow 0$. Le second terme tend vers 0 uniformément par rapport à t en vertu de l'uniforme convergence de $u_\tau(t)$ vers $u(t)$.

Par conséquent, pour $\tau \rightarrow 0$, $u(t) - \overline{u}(t)$ tend vers 0 uniformément par rapport à t .

On démontrerait de façon analogue que :

$$\left\| \frac{1}{\overline{u}(t)} - \frac{1}{u(t)} \right\| = \left\| \frac{1}{\overline{u}(t)} - \frac{1}{u(t)} \right\| \rightarrow 0 \quad |10.91|$$

uniformément par rapport à t quand $\tau \rightarrow 0$.

Par conséquent $\overline{u_\tau}(t)$ avec ses dérivées $D^\alpha \overline{u_\tau}$ converge vers $u(t)$. Appliquant le passage à la moyenne à l'équation I_τ , nous avons :

$$\frac{\partial \overline{u_\tau}}{\partial t} = \mathcal{L} \overline{u_\tau} + f_\tau(t) \quad |10.92|$$

$$\text{où : } f_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [\mathcal{L}_\tau(\theta) u_\tau(\theta) - \mathcal{L}(t) \overline{u_\tau}(t)] d\theta \quad |10.93|$$

Montrons que $f_\tau(t) \rightarrow 0$ pour $\tau \rightarrow 0$ pour $u_0 \in \mathcal{B}_2$.

Pour $f_\tau(t)$, on a la représentation :

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [\alpha_i(\tau, \theta) \mathcal{L}_i(\theta) u_\tau(\theta) - \mathcal{L}_i(t) \overline{u_\tau}(t)] d\theta \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{p}{\tau} \int_{\sigma_i} [\mathcal{L}_i(\theta) u_\tau(\theta) - \mathcal{L}_i(t) \overline{u_\tau}(t)] d\theta \end{aligned} \quad |10.94|$$

où dans la dernière intégrale l'intégration s'effectue dans l'intervalle de longueur $\frac{\tau}{p}$, dans lequel $\alpha_i \neq 0$.

Mettons cette intégrale sous la forme :

$$\int_{\sigma} [\mathfrak{L}_i(\theta) u(\theta) - \mathfrak{L}_i(t) \overline{u_{\tau}(t)}] d\theta = \int_{\sigma_i} [\mathfrak{L}_i(\theta) u_{\tau}(\theta) - \mathfrak{L}_i(t) u_{\tau}(t)] d\theta + \int_{\sigma_i} \mathfrak{L}_i(t) [u_{\tau}(t) - \overline{u_{\tau}(t)}] d\theta \quad |10.95|$$

$u_{\tau}(\theta) \mathfrak{L}_i(\theta)$ est uniformément continue, par conséquent la première intégrale est en norme d'ordre $\varepsilon_1(\tau)$, où $\varepsilon_1(\tau) \rightarrow 0$, quand $\tau \rightarrow 0$.

Comme $\mathfrak{L}_i(t) \overline{u_{\tau}(t)}$ converge uniformément vers $\mathfrak{L}_i(t) u_{\tau}(t)$ pour $\tau \rightarrow 0$, la deuxième intégrale a aussi en norme l'ordre $\varepsilon_2(\tau)$, où $\varepsilon_2(\tau) \rightarrow 0$ quand $\tau \rightarrow 0$.

En fin de compte, $f_{\tau}(t) \rightarrow 0$ quand $\tau \rightarrow 0$ pour $u_0 \in \mathcal{B}_2$.

Il est clair que $f_{\tau}(t)$ peut être mis sous la forme :

$$f_{\tau}(t) = M_{\tau}(t) u_0 \quad |10.96|$$

où l'opérateur linéaire $M_{\tau}(t)$ a dans \mathcal{B}_1 une norme uniformément bornée par rapport à τ :

$$\| M_{\tau}(t) \|_{\mathcal{B}_1} \leq C(T) \| u_0 \|_{\mathcal{B}_1} \quad |10.97|$$

Comme $\| M_{\tau}(t) u_0 \| \rightarrow 0$ quand $\tau \rightarrow 0$ pour tous les $u_0 \in \mathcal{B}_2$, d'après le théorème de Banach-Steinhaus dans l'espace \mathcal{B}_1 , $M_{\tau}(t)$ converge vers l'opérateur nul et $f_{\tau}(t) \rightarrow 0$ pour $u_0 \in \mathcal{B}_1$.

Comme il a été démontré que $\mathfrak{L} \overline{u_{\tau}} \rightarrow \mathfrak{L} u$, l'égalité (10.92) entraîne que $\frac{\partial u_{\tau}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$

et on a l'égalité :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{L} u}$$

Le théorème est démontré.

Nous avons déjà dit que dans le cas de l'équation à coefficients constants la correction de I entraîne la correction de I^k ($k = 1, 2, 3$).

Ceci est vrai également pour le système I_{τ}^k .

Dans ce cas les hypothèses des théorèmes 1 et 3 ne se différencient que par l'exigence de la régularité des conditions initiales.

On a également des exigences plus faibles de correction du système I_{τ} dans le cas où l'étude s'effectue dans des espaces de Banach concrets ou dans des systèmes concrets.

THÉORÈME 4

Si les problèmes I_τ, I_τ^1 sont uniformément corrects dans $\mathcal{B} = L_q(\Omega)$ ($q > 1$) et \mathcal{B}_1 , alors $u_\tau(t)$ pour $\tau \rightarrow 0$ est uniformément fondamentale par rapport à t et chaque fonction limite régulière $u(t)$ est solution du problème I .

Si $u_0^1 \in L_q$, alors $u(t)$ est régulière et est la solution unique du problème I .

Remarquons que dans le théorème 4 nous supposons de plus que u^1 est dérivable au moins au premier ordre par rapport à toutes les variables d'espaces.

Examinons le système symétrique du premier ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

où $A_i(x, t)$ est une matrice symétrique, continue dans Ω et les dérivées du premier ordre par rapport aux variables d'espace sont continues.

Posons :

$$\mathcal{L}_i = A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Dans ce cas, $p = m$, $\mathcal{B} = L_2$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 5

Les problèmes I, I_τ sont uniformément corrects. La fonction $u_\tau(t)$ converge uniformément par rapport à t quand $\tau \rightarrow 0$ vers la solution du problème I .

NOTE DU TRADUCTEUR

Voici la transcription de quelques abréviations utilisées dans la bibliographie :

M.G.U.	Université de Moscou
L.G.U.	Université de Léningrad
N.G.U.	Université de Novosibirsk
D.A.N.	Compte rendu à l'Académie des Sciences (de l'U.R.S.S.)
M.I.A.N.	Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences
J.V.M.M.F.	Journal de Calcul Numérique et de Physique Mathématique
S.O.A.N.	Division Sibérienne de l'Académie des Sciences.

Les noms propres et les titres des ouvrages ont été transcrits en utilisant la convention internationale de translittération.

- [1] LJUSTERNIK L. A., SOBOLEV V. I. — *Elementy funkcionalnogo analiza* (éléments d'analyse fonctionnelle), Moscou 1965.
- [2] PHILLIPS R., HEALEY E. — *Funkcional'nyj analiz i polugrupy* (analyse fonctionnelle et semi-groupes), Moscou I. L. (1962), chap. XXII.
- [3] LAX P. D., RICHTMYER R. D. — *Survey of the stability of linear finite difference equations*. Com. on pure and applied mathematics, vol. IX (1956), pp. 267, 293.
- [4] RICHTMYER R. D. — *Raznostnye metody rešenija kraevyh zadač* (Méthodes aux différences pour la résolution des problèmes aux limites), I. L. Moscou (1960).
- [5] RJABEN'KIJ V. S. — *O primenenii metoda konečnyh raznostej k rešeniju zadači Koši* (Sur l'application de la méthode aux différences finies à la résolution du problème de Cauchy). D. A. N. 86, 6 (1952).
- [6] MEJMAN N. N. — *K teorii uravnenija v častnyh proizvodnyh* (Sur la théorie des équations aux dérivées partielles). D. A. N. 97,4 (1954).
- [7] RICHTMYER R. D. — *Abstraknaja teorija linejnoj neodnorodnoj zadači Koši*. Sb. « Nekotorye voprosy vyčsil. i prikl. matem. » (Théorie abstraite du problème de Cauchy linéaire non homogène. Recueil « Quelques questions d'analyse numérique et de mathématiques appliquées »). Novosibirsk, (1966)
- [8] LOKUCIEVSKIJ O. V. — *Čislennye metody rešenija uravnenij v častnyh proizvodnyh* (Méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles) « Usp. matem. nauk », 1956, t. XI, édition 3.
- [9] MARČUK G. I. — *Metody rasčeta jadernyh reaktorov*. (Méthodes de calcul des réacteurs nucléaires). Gosatomizdat, Moscou 1961.
- [10] PEACEMAN D. W., RACHFORD H. H. jr. — *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation*. Journ. Soc. Ind. Appl. Math., vol. III (1955), pp. 28-42.
- [11] DOUGLAS Jim jr. — *On the numerical integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ by implicit methods* Journ. Soc. Ind. Appl. Math., vol. III, n° 1 (1955), pp. 42-65.

- [12] DOUGLAS Jim jr. and RACHFORD H. H. jr. — *On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 82, n° 2 (1956), pp. 421-439.
- [13] JANENKO N. N. — *Ob odnom raznostnom metode ščeta mnogomernogo uravnenija teploprovodnosti*. (Sur une méthode aux différences de calcul de l'équation polydimensionnelle de la chaleur). D. A. N. τ. 125, n° 6 (1959), pp. 1207-1210.
- [14] JANENKO N. N., SUČKOV V. A., POGODINE JU. JA. — *O raznostnom rešenii uravnenija teploprovodnosti v krivolinejnyh koordinatah*. (Sur la résolution aux différences de l'équation de la chaleur en coordonnées curvilignes). D. A. N. τ. 128, n° 5 (1959), pp. 903-905.
- [15] JANENKO N. N. — *Prostye nejavnnye shemy dlja mnogomernyh zadač. Doklad na Vsesozuznom soveščanii po vyčislitel'noj matematike i vyčislitel'noj tehnike*. (Schémas implicites simples pour des problèmes polydimensionnels. Compte rendu de la conférence nationale de calcul numérique et d'informatique). Moscou, novembre 1959.
- [16] BAKER G. A. jr., OLIPHANT I. A. — *An implicit numerical method for solving the two dimensional heat equation*. Quarterly of applied Mathematics, vol. XVIII (1960), n° 4, pp. 361-375.
- [17] BAKER G. A. jr. — *An implicit numerical method for solving the n-dimensional heat equation*. Quarterly of applied Mathematics, vol. XVIII (1960), n° 4, pp. 440-442.
- [18] JANENKO N. N. — *O nejavnnyh raznostnyh metodah ščeta mnogomernogo uravnenija teploprovodnosti*. (Sur les méthodes aux différences implicites de calcul de l'équation polydimensionnelle de la chaleur). Izvestija VUZ, matematika n° 4 (23), (1961), pp. 148-157.
- [19] OLIPHANT I. A. — *An implicit numerical method for solving two dimensional time-dependent diffusion problems*. Quarterly of appl. Math., vol. XIX, n° 3 (1961), pp. 221-229.
- [20] BULEEV N. I. — *Čislennye metod rešenija dvyhmernyh i trehmernyh uravnenij diffuzii*. (Schémas aux différences pour les équations bidimensionnelles et tridimensionnelles de la diffusion). Matem. sb. (1960), τ. 51 (93), n° 2, pp. 227-238.
- [21] D'JAKONOV E. G. — *Raznostnye shemy s rassčepļajuščimsja operatorom dlja nestacionarnyh uravnenij*. (Schémas aux différences avec opérateur désintégrable pour les équations non stationnaires). D. A. N., τ. 144, n° 1 (1962).
- [22] D'JAKONOV E. G. — *O nekotoryh raznostnyh shemah dlja rešenija kraevykh zadač. Žurnal vyčislitel'noj matematike i matematičeskoj fiziki*. (Sur quelques schémas aux différences pour la résolution de problèmes aux limites. Journal de calcul numérique et de physique mathématique). τ. 2, n° 1 (1962), pp. 57-79.
- [23] D'JAKONOV E. G. — *Raznostnye shemy s rassčepļajuščimsja operatorom dlja mnogomernyh nestacionarnyh zadač*. (Schémas aux différences avec opérateur désintégrable pour les équations non stationnaires polydimensionnelles). J. V. M. M. F. τ. 2, N° 4 (1962), pp. 549-567.
- [24] D'JAKONOV E. G. — *Raznostnye shemy s rassčepļajuščimsja operatorom dlja obščih paraboličeskih uravnenij vtorogo porjadka s peremennymi koefficientami*. (Schémas aux différences avec opérateur désintégrable pour les équations paraboliques générales du second ordre à coefficients variables). J. V. M. M. F. τ. 4, n° 2 (1964).
- [25] BRIAN P. L. I. — *A finite difference method of high order accuracy for the solution of three dimensional heat conduction problem*. A. I. Ch. E. J., n° 7 (1961), pp. 367-370.
- [26] DOUGLAS J. jr. — *Alternating direction method for three space variables*, Num. Math. 4 (1962), pp. 41-63.
- [27] SAUL'EV V. K. — *Integrirovanie uravnenij paraboličeskojo tipa metodom setok*. (Intégration d'équations paraboliques par la méthode du maillage). Fizmatgiz, Moscou (1960).
- [28] JANENKO N. N. — *Nekotorye voprosy teorii shodimosti raznostnyh shem s postojannymi i peremennymi koefficientami*. (Quelques questions de la théorie de la convergence des schémas aux différences à coefficients variables et à coefficients constants). Trudy, IV Vs. mat. s'ezda, τ. II, Nauka (1964).

- [29] LAASONEN. — *Über eine methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung*. Acta Math. 81 (1949), 309.
- [30] LANDAU L. D., MEJMAN N. N., HALATNIKOV I. N. — *Čislennye metody integririvanja uravnenija v častnyh proisvodnyh metodom setok*. (Méthodes numériques d'intégration des équations aux dérivées partielles par la méthode du maillage). Trudy III-go Vsesojuznogo matematičeskogo s'ezda, t. II, pp. 66.
- [31] LADYŽENSKAJA O. A. — *Rešenje zadači Koši dlja giperboličeskikh sistem metodom konečnyh raznostej*. (Résolution du problème de Cauchy pour les systèmes paraboliques par la méthode des différences finies). Kand. diss., L. G. U. mart 1949; učenye zapiski L. G. U., vyp. 23 (1952) 192-246; D. A. N. 88, n° 4 (1953), pp. 607-610.
- [32] ROUSE C. — *A method for the numerical calculation of hydrodynamic flow and radiation diffusion by implicit differencing*. J. Ind. Appl. Math. vol. IX, n° 1 (1961).
- [33] JANENKO N. N., NEUVAŽAEV V. E. — *Odin metod rasčeta gazodinamičeskikh dviženij s nelinejnoj teploprovodnost'ju*. (Une méthode de calcul des mouvements gazeux avec une conduction de la chaleur non linéaire). Trudy M. I. A. N. - U. R. S. S., t. 74 (1966).
- [34] GODUNOV S. K. — *Raznostnye metody rešenija uravnenij gazovoj dinamiki*. Lekcii dlja studentov N. G. U. (Méthodes aux différences pour la résolution des équations de la dynamique des gaz. Conférences faites aux étudiants du N. G. U.). Novosibirsk, 1962.
- [35] JANENKO N. N., JAUŠEV I. K. — *Ob odnoj absolutno ustojčivoj shemy integririvanja uravnenij gidrodinamiki*. Sbornik Raznostnye metody rešenija zadač matematičeskoi fiziki. (A propos d'un schéma absolument stable d'intégration des équations de l'hydrodynamique. Recueil « Méthodes aux différences pour la résolution des problèmes de physique mathématique »). Trudy M. I. A. N., t. 74.
- [36] BAGRINOVSKIJ A. A., GODUNOV S. K. — *Raznostnye metody dlja mnogomernyh zadač*. (Méthodes aux différences pour les problèmes polydimensionnels). D. A. N. t. 115, (1957), pp. 431-433.
- [37] ANUČINA N. N., JANENKO N. N. — *Nejavnye shemy rassčeplenija dlja giperboličeskikh uravnenij i sistem*. (Schémas implicites de désintégration pour les équations et les systèmes hyperboliques). D. A. N., t. 128, n° 6 (1959), pp. 1103-1106.
- [38] GODUNOV S. K., ZABRODIN A. V. — *O raznostnyh shemah vtorogo porjadka točnosti dlja mnogomernyh zadač*. (A propos des schémas aux différences de second ordre de précision pour les problèmes polydimensionnels). J. V. M. M. F. t. 2, n° 4 (1962), pp. 706-708.
- [39] HABETLER G. I., WACHPRESS E. L. — *Symmetric successive overrelaxation in solving diffusion difference equations*. Math. of comp. vol. 15 (1961), pp. 356-362.
- [40] KONOVALOV A. N. — *Metod drobnyh šagov rešenija zadači koši dlja mnogomernogo uravnenija kolebanij*. (Méthode à pas fractionnaires pour la résolution du problème de Cauchy pour l'équation polydimensionnelle des oscillations). D. A. N. 1962. t. 147, n° 1.
- [41] SAMARSKIJ A. A. — *Lokal'no odnomernye raznostnye shemy dlja mnogomernyh uravnenij giperboličeskogo tipa v proizvol'noj oblasti*. (Schémas aux différences localement homogènes pour les équations polydimensionnelles hyperboliques dans un domaine quelconque). J. V. M. M. F. t. 4, n° 4, 638-648 (1964).
- [42] FRIEDRICHS K. O. — *Symmetric hyperbolic linear differential equations*. Comm. on Pure and Appl. Math., vol. 7 (1954), pp. 345-392.
- [43] ANUČINA N. N. — *Nekotorye raznostnye shemy dlja sistem giperboliceskikh uravnenij*. (Quelques schémas aux différences pour les systèmes d'équations hyperboliques). Trudy M. I. A. N. t. 74.
- [44] FRANKEL S. — *Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations*. Math. tables Aid Comput 4, pp. 65-75 (1950).
- [45] YOUNG D. — *Iterative methods for solving partial equations of elliptic type*. Transactions of the Amer. Math. Soc. 76, pp. 92-111 (1954).

- [46] D'JAKONOV E. G. — *Ob odnom iteracionnom sposobe rešenija sistem konečnoraznostnyh uravnenij.* (A propos d'un moyen itératif de résolution des systèmes d'équations aux différences finies). D. A. N., 138, n° 3 (1961), 522-525.
- [47] D'JAKONOV E. G. — *Metod mažorirujuščego operatora dlja rešenja raznostnyh analogov nekotoryh sil'no elliptičeskikh sistem.* (Méthode de l'opérateur majorant pour la résolution des équivalents aux différences de quelques systèmes fortement elliptiques). Usp. Math. Nauk, т. XIX, vyp. 5, pp. 197-198 (1964).
- [48] IL'IN V. P. — *O priminenii metoda peremennyh napravlenij dlja rešenja kvazilinejnyh uravnenij paraboličeskogo i elliptičeskogo tipov.* Trudy Simpoziuma po prikladnoj i vyčislitel'noj matematike. (« Sur l'application de la méthode des directions alternées pour la résolution des équations quasi linéaires de type parabolique et elliptique ». Travaux du Symposium de Calcul numérique et de mathématiques appliquées). Novosibirsk, 1965.
- [49] ENAL'SKIJ V. A. — *O dviženija častic v elektromagnitnom pole.* (Sur le mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique). Trudy M. I. A. N. т. 74 (1966).
- [50] SAMARSKIJ A. A. — *Ob odnom ekonomičeskom algoritme čislennogo rešenija sistem differencial'nyh i algebričeskikh uravnenij.* (Sur un algorithme économique de résolution numérique de systèmes d'équations différentielles et algébriques). J. V. M. M. F. т. 4, 6, 3, 580-585 (1964).
- [51] MARČUK G. I., JANENKO N. N. *Primenenie metoda rassčepenija (drobnyh šagov) dlja rešenija zadač matematičeskoj fiziki. Doklad na Vsesojuznom kongreci po vyčislitel'noj matematike (Moskva, fevral' 1965). Doklad na kongresse I. F. I. P. (Nju-Jork, maj 1965).* (« Application de la méthode de désintégration (pas fractionnaires) à la résolution de problèmes de physique mathématique » Conférence au congrès national de calcul numérique (Moscou, février 1965). Conférence au congrès I. F. I. P. New York, mai 1965). Voir également *Trudy Simposiuma po prikladnoj i vyčislitel'noj matematike.* (Travaux du Symposium de calcul numérique et de mathématiques appliquées). Novosibirsk, juin 1965.
- [52] RICHARDSON L. D. — *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses on a masonry dam.* Phil. Trans. Roy. Soc., London Ser. A. 83, pp. 335-336.
- [53] VAZOV V., FORSAJT DŽ. — *Raznostnye metody rešenija differencial'nyh uravnenij v častnyh proizvodnyh.* (Méthodes aux différences pour la résolution des équations aux dérivées partielles). I. L., Moscou (1963).
- [54] MARKOV V. — *O funkcijah naimenee uklonjajuščih'sja ot nulja v dannom promežutke.* (A propos des fonctions s'éloignant le moins possible de zéro dans un intervalle donné). Saint-Pétersbourg (1892).
- [55] BIRKHOFF Garret, VARGA R. S., YOUNG David. — *Alternating direction implicit method.* Advances in Computers, vol. 3, pp. 189-273. Ac. Press, New York-London (1962).
- [56] BIRKHOFF G., VARGA R. S. — *Implicit alternating direction methods.* Trans. Amer. Math. Soc., 92, pp. 13-24 (1959).
- [57] KELLOGG R. B. — *Another alternating direction implicit method.* J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 11, n° 4 (1963), pp. 976.
- [58] TIMOŠENKO S. P., VOJNOVSKIJ-KRIGER S. — *Plastinki i oboločki.* (Disques et enveloppes). Fizmatgiz, Moscou (1963); voir également : TIMOŠENKO S. P. — *Ustojčuvost' uprugih sistem.* (Stabilité des systèmes élastiques). Ogiz Gostehizdat 1946, M. L.
- [59] KONOVALOV A. N. — *Primenenie metoda rassčepenija k čislennomu rešeniju dinamičeskikh zadač teorii uprugostu.* (Applications de la méthode de désintégration à la résolution numérique des problèmes dynamiques de la théorie de l'élasticité). J. V. M. M. F., т. 4, n° 4, 760-764 (1964).

- [60] CONTE S. D. and DAMES R. J. — *An alternating direction method for solving the biharmonic equation*. Math. table and other aids to Comp., vol XII, July 1958, n° 63, pp. 198-204.
- [61] KONOVALOV A. N. — *Ob odnoj iteracionnoj sheme rešenija statističeskikh zadač teorii uprugosti*. (Sur un schéma itératif résolvant les problèmes statistiques de la théorie de l'élasticité). J. V. M. M. F., t. 4, n° 5 (1964), pp. 942-945.
- [62] DOUGLAS J. jr., GUNN I. E. — *Two high order correct difference analogues for the equation of multidimensional heat flow*. Math. Comp. 1963, 17, n° 81, pp. 71-80.
- [63] SAMARSKIJ A. A. — *Shemy povyšennogo porjadka točnosti dlja mnogomernogo uravnenija teploprovodnosti*. (Schéma de haute précision pour l'équation polydimensionnelle de la chaleur). J. V. M. M. F., t. 3, n° 5 (1963), pp. 812-840.
- [64] SAMARSKIJ A. A., ANDREEV V. B. — *Ob odnoj raznostnoj sheme povyšennogo porjadka točnosti dlja uravnenij elliptičeskogo tipa s neskol'komi prostranstvennymi peremennymi*. (Sur un schéma aux différences de haute précision pour les équations de type elliptiques contenant plusieurs variables spatiales). J. V. M. M. F., t. 3, n° 6 (1963), pp. 1006-1012.
- [65] SOFRONOV I. D. — *Raznostnaja shema s diagonal'nymi napravlenijami progonok dlja rešenija uravnenija teploprovodnosti*. (Schéma aux différences avec des récurrences diagonales pour la résolution de l'équation de la chaleur). J. V. M. M. F., t. 5, n° 2, 1965, pp. 347-350.
- [66] SOFRONOV I. D. — *K raznostnomu rešeniju uravnenija teploprovodnosti v krivolineinyh koordinatah*. (Sur une résolution aux différences de l'équation de la chaleur en coordonnées curvilignes). J. V. M. M. F., t. 3, n° 4 (1963), pp. 786-788.
- [67] ENAL'SKIJ V. A. — *O dvuh shemah povyšennoj točnosti dlja rešenija zadači Dirihle*. (Sur deux schémas de haute précision pour la résolution du problème de Dirichlet). Trudy M. I. A. N., t. 74 (1966).
- [68] ENAL'SKIJ V. A. — *Ob odnom iteracionnom processe povyšennoj točnosti. Dokladi 3-j Sibirskoj konferencii po matematike i mehanike*. (« Sur un processus itératif de haute précision ». Compte rendu à la 3^e Conférence Sibérienne de mathématique et de mécanique). Tomsk (1964), pp. 103-104.
- [69] MARČUK G. I., JANENKO N. N. — *Rešenje mnogomernogo kinetičeskogo uravnenija metodom rassčepjenja*. (Résolution de l'équation polydimensionnelle de la cinétique par la méthode de désintégration). D. A. N. t. 157, n° 6, pp. 1291-1292 (1964).
- [70] MARČUK G. I., SULTANGAZIN U. M. — *O shodimosti metoda rassčepjenja dlja uravnenija perenosa izlučeniya*. (Sur la convergence de la méthode de désintégration pour l'équation du transport du rayonnement). D. A. N., 161, 1 (1965).
- [71] MARČUK G. I., SULTANGAZIN U. M. — *K voprosu o rešenii kinetičeskogo uravnenija perenosa metodom rassčepjenja*. (Au sujet de la résolution de l'équation cinétique du transport par la méthode de désintégration). D. A. N., 163, 4 (1965).
- [72] KANTORVIČ L. V., AKILOV G. P. — *Funkcional'nyj analiz v normirovannyh prostranstvah*. (« Analyse fonctionnelle dans les espaces normés »). Fizmatgiz, 1959.
- [73] ANTONCEV S. N., VASIL'EV O. F., KUZNECOV B. G., JANENKO N. N. — *Čislennyj rasčet vodosliva. Trudij Simpoziuma po prikladnoj i vyčislitel'noj matematike*. (« Calcul numérique d'un déversoir ». Travaux du Symposium de Calcul numérique et de mathématiques appliquées). Novosibirsk (1965).
- [74] VLADIMIROVA N. N., KUZNECOV B. G., JANENKO N. N. — *Čislennyj rasčet simmetričnogo obtekanija plastinki ploskim potokom vjazkoj nesžimaemoj židkosti. Trudy Simpoziuma po prikladnoj i vyčislitel'noj matematike*. (« Calcul numérique du contournement symétrique d'une plaque par le courant plan d'un liquide visqueux et incompressible ». Travaux du Symposium de Calcul numérique et de mathématiques appliquées). Novosibirsk (1965).
- [75] DOUGLAS Jim jr. — *The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations*. Trans. Am. Soc., 89 (1958), pp. 484-518.

- [76] GODUNOV S. K., SEMENDJAEV K. A. — *Raznostnye metody čislennogo rešenija zadač gazovoj dinamiki*. (Méthode aux différences pour la résolution numérique du problème de la dynamique des gaz). J. V. M. M. F. 2, n° 1 (1962), 3-14 (doklad na IV vsesojuznom matematičeskom s'ezde).
- [77] MARČUK G. I. — *Čislennyj algoritm rešenija uravnenij prognoza pogody*. (Algorithme numérique de résolution des équations de la météorologie). D. A. N., 156, 2 (1964).
- [78] MARČUK G. I. — *Novyj podhod k čislenomu rešeniju uravnenija prognoza pagody*. (Nouvelle approche du problème de la résolution numérique des équations de la météorologie). *Simpozium po dolgosročnym metodam prognoza* (Symposium sur les méthodes de prévision à long terme). U. S. A., Boulder, juillet 1964.
- [79] JANENKO N. N. — *Ob ekonomičeskih nejavnih shemah (metod drobnyh šagov)*. (A propos de schémas implicites économiques (méthode à pas fractionnaires). D. A. N., т. 134, n° 5, pp. 1034-1036.
- [80] JANENKO N. N. — *O shodimosti metoda rassčeplenija dlja uravnenija teploprovodnosti c peremennymi koefficientami*. (Sur la convergence de la méthode de désintégration pour l'équation de la chaleur à coefficients variables). J. V. M. M. F., vyp. 5 (1962), pp. 933-937.
- [81] BOJARINCEV Ju.E. — *O shodimosti metoda rassčeplenija i o lokal'nom kriterii korrektnosti dlja raznostnyh uravnenij s peremennymi koefficientami*. Trudy Simpoziuma po prikladnoj i vyčislitel'noj matematike. (« Sur la convergence de la méthode de désintégration et sur le critère local de correction pour les équations aux différences à coefficients variables. » Travaux du Symposium de calcul numérique et de mathématiques appliquées). Novosibirsk (1965).
- [82] LEES M. — *Alternating direction methods for hyperbolic differential equations*. Journ. Soc. Ind. Math., vol X (1960), n° 4, pp. 610-616.
- [83] LEES M. — *Alternating direction and semiexplicit difference methods for parabolic partial differential equation*. Num. Math., vol. 3 (1961), n° 5, pp. 398-462.
- [84] SAMARSKIJ A. A. — *Ob odnom ekonomičnom raznostnom metode rešenja mnogomernogo paraboličeskogo uravnenija v proizvol'noj oblasti*. (Sur une méthode aux différences économiques de résolution des équations paraboliques polydimensionnelles dans un domaine quelconque). J. V. M. M. F., т. 2, n° 5 (1962), pp. 787-784.
- [85] SAMARSKIJ A. A. — *O shodimosti metoda drobnyh šagov dlja uravnenija teploprovodnosti*. (Sur la convergence de la méthode à pas fractionnaires pour l'équation de la chaleur). J. V. M. M. F., т. 2, n° 6, pp. 107-112.
- [86] DOUGLAS J. jr., GUNN James E. — *A general formulation of alternating direction methods. Part I. Parabolic and hyperbolic problems*. Num. Math., 6 (1964), pp. 428-453.
- [87] FADDEEV D. K., FADDEVA V. N. — *Vyčislitel'nye metody linejnoj algebry*. (Méthodes numériques de l'algèbre linéaire). Fizmatgiz, Moscou, 1960, ch. III.
- [88] JANENKO N. N. — *O slaboj approksimacii sistem diferencial'nyh uravnenij*. (Sur une faible approximation des systèmes d'équations différentielles). Sibirskij matematičeski žurnal, т. V, n° 6 (1964).
- [89] DEMIDOV G. V., JANENKO N. N. — *Metod slaboj approksimacii kak konstrukcionnyj metod postroenija rešenija zadači Koši*. Trudy Simpoziuma po prikladnoj i vyčislitel'noj matematike. (« La méthode de faible approximation comme méthode constructive de résolution du problème de Cauchy. » Travaux du Symposium de calcul numérique et de mathématiques appliquées). Novosibirsk (1965).
- [90] D'JAKONOV E. G. — *O nekotoryh iteracionnyh metodah rešenija sistem raznostnyh uravnenij, vznikajuščih pri rešenii metodom setok uravnenij v častnyh proisvodnyh elliptičeskogo tipa*. Vyčislitel'nye metody i programirovanie III. (« A propos de quelques méthodes itératives de résolution de systèmes d'équations aux différences apparaissant à la résolution par la méthode du maillage d'équations aux dérivées partielles de type elliptique. » Méthodes de calcul numérique et programmation III). izd. M. G. U., 1965.

- [91] SAMARSKIJ A. A. — *O raznostnyh shemah dlja mnogomernyh differencial'nyh uravnenij matematičeskoj fiziki*. (Sur des schémas aux différences pour les équations différentielles polydimensionnelles de la physique mathématique). *Aplikace matematiky* (1965) svazem 10, cislo 2, 146-163.
- [92] KELLOGG R. B. — *An alternating direction method for operator equations*. *Journ. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 12, n° 4, pp. 848-853.
- [93] TĪHONOV A. N., SAMARSKIJ A. A. — *Ob odnorodnyh raznostnyh shemah*. (Sur les schémas aux différences homogènes). *J. V. M. M. F.*, т 1 (1961), pp. 1-63.
- [94] SAMARSKIJ A. A. — *O prinsipi additivnosti dlja postroenija ekonomičnyh raznostnyh shem*. (Principe de l'additivité pour la construction de schémas aux différences économiques). *D. A. N.*, т 165, n° 6 (1965), pp. 1253-1256.
- [95] D'JAKONOV E. G. — *Rešenje nekotoryh mnogomernyh zadač matematičeskoj fiziki pri pomošči setok*. Dissertacija. (« Résolution de quelques problèmes polydimensionnels de physique mathématique à l'aide de maillages ». Thèse). M. G. U. 1962.
- [96] SAMARSKIJ A. A. — *Ekonomičnye raznostnye shemy dlja giperboličeskoj sistemy uravnenij so smešannymi proisvodnymi i ih priminenie dlja uravnenij uprugosti*. (Schémas aux différences économiques pour les systèmes d'équations hyperboliques à dérivées mixtes et leur applications aux équations de l'élasticité). *J. V. M. M. F.*, т. 5, n° 1, 1965, pp. 34-43.
- [97] MARČUK G. I. — *Čislennye metody rešenija zadač prognoza pogody i teorii klimata*. (Méthodes numériques de résolution des problèmes de la météorologie et de la théorie des climats). S. O. A. N. U. R. S. S., 1965.
- [98] GOL'DIN V. JA. — *Haraterističeskaja raznostnaja shema dlja nestacionarnogo kinetičeskogo uravnenija*. (Schéma aux différences caractéristiques pour l'équation cinétique d'évolution). *D. A. N.*, т. 133, n° 4 (1960), pp. 749-751.
- [99] YOSIDA K. — *Functional Analysis*. Springer, 1965.
- [100] IL'IN V. P. — *O raščepnenii raznostnyh uravnenij paraboličeskovo i elliptičeskovo tipov*, « *Sib. Mat. Z* ». (« Sur la désintégration des équations aux différences de type parabolique et elliptique ».) *Journal Sibérien de Math.*, 1965, N° 6.

Ouvrages en français

- [A] BARDOS C. et SIBONY M. — (A paraître.)
- [B] BREZIS H. — (A paraître.)
- [C] KENNETH M. et SIBONY M. — (A paraître.)
- [D] LIEUTAUD. — Thèse pour la Faculté des Sciences de Paris, 1968.
- [E] LIONS J.-L. et TEMAM R. — *Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des variations*. C. R. Académie des Sciences de Paris 263, série A (1966), pp. 563-565.
- [F] LIONS J.-L. et TEMAM R. — *Approximation de la solution d'inéquations variationnelles par décomposition des opérateurs et éclatement des contraintes. Applications*. (A paraître.)
- [G] SIBONY M. — Thèse. (A paraître.)
- [H] TEMAM R. — Thèse pour la Faculté des Sciences de Paris, 1967.
- [I] LEMARÉCHAL C. et NEPOMIASTCHY P. — *Rapport D. G. R. S. T.*, 1968. (A paraître.)
- [J] TEMAM R. — *Intégration numérique des équations de Navier Stokes*. (A paraître.)
- [K] LIONS J.-L. et TEMAM R. — (A paraître.)
- [L] LIONS J.-L. — *Sur l'approximation de la solution d'équations d'évolution couplées*. (A paraître.)

Ouvrages en allemand

LAASONEN, [29]

Ouvrages en anglais

BAKER G. A. jr., [16], [17]
BIRKHOFF G., [55], [56]
BRIAN P. L. I., [25]
CONTE S. D., [60]
DAMES R. J., [60]
DOUGLAS J. jr., [11], [12], [26], [62], [75],
[86]
FRANKEL S., [44]
FRIEDRICH K. O., [42]
GUNN I. E., [62], [86]
HABETLER G. I., [39]
KELLOGG R. B., [57], [92]
LAX P. D., [3]
LEES M., [82], [83]
OLIPHANT I. A., [16], [19]
PEACEMAN D. W., [10]
RACHFORD H. H. jr., [10], [12]
RICHARDSON L. D., [52]
RICHTMYER R. D., [3], [4]
ROUSE C., [32]
VARGA Richard S., [55], [56]
WACHPRESS E. L., [39]
YOSIDA K., [99]
YOUNG D., [45], [55]

Ouvrages en russe
(en translittération)

AKILOV G. P., [72]
ANDREEV V. B., [64]
ANTONCEV S. N., [73]
ANUČINA N. N., [37], [43]
BAGRINOVSKIJ A. A., [36]
BOJARINCEV JU. E., [81]
BULEEV N. I., [20]
D'JAKONOV E. G., [21], [22], [23], [24],
[46], [47], [90], [95]
DEMIDOV G. V., [89]

ENAL'SKIJ V. A., [49], [67], [68]
FADDEEVA V. N., [87]
FADDEEV D. K., [87]
FORSAJT Dž., [53]
GODUNOV S. K., [34], [36], [38], [76]
GOL'DIN V. JA., [98]
HALATNIKOV I. N., [30]
HEALEY E., [2]
IL'IN V. P., [48], [100]
JANENKO N. N., [13], [14], [15], [18],
[28], [33], [35], [37], [51], [69], [73], [74],
[79], [80], [88], [89]
JAUŠEV J. K., [35]
KANTOROVIČ L. V., [72]
KONOVALOV A. N., [40], [59], [61]
KUZNECOV B. G., [73], [74]
LADYŽENSKAJA O. A., [31]
LANDAU L. D., [30]
LJUSTERNIK L. A., [1]
LOKUCIEVSKIJ O. V., [8]
MARČUK G. I., [9], [51], [69], [70], [71],
[77], [78], [97]
MARKOV V., [54]
MEJMAN N. N., [6], [30]
NEUVAŽAEV V. E., [33]
PHILLIPS R., [2]
POGODINE JU. JA., [14]
RICHTMYER R. D., [7]
RJABEN'KIJ V. S., [5]
SAMARSKIJ A. A., [41], [50], [63], [64], [84],
[85], [91], [93], [94], [96]
SAUL'EV V. K., [27]
SEMENDJAEV K. A., [76]
SOBOLEV, V. I., [1]
SOFRONOV I. D., [65], [66]
SUČKOV V. A., [14]
SULTANGAZIN U. M., [70], [71]
TIHONOV A. N., [93]
TIMOŠENKO S. P., [58]
VASIL'EV O. F., [73]
VAZOV V., [53]
VLADIMIROVA N. N., [74]
VOJNOVSKIJ-KRIGER S., [58]
ZABRODIN A. V., [38]

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
Préface à l'édition française	5
1 Schémas homogènes	7
1.1 <i>Classe des problèmes étudiables</i> <i>Problèmes de Cauchy dans un espace de Banach</i>	7
1.2 <i>Schémas homogènes</i>	10
1.3 <i>Exemples</i>	17
1.3.1 Schéma de la <i>croix</i> (schéma de Richardson)	18
1.3.2 Schéma du <i>losange</i> (schéma de Dufort et Frankel)	18
1.3.3 Schéma explicite à deux niveaux	19
1.3.4 Schéma implicite à deux niveaux (schéma de Crank-Nicholson)	20
1.4 <i>Méthode de factorisation (récurrence)</i>	23
1.5 <i>Méthode de factorisation matricielle</i>	26
2 Schémas simples à pas fractionnaires pour l'intégration d'équations de type parabolique	31
2.1 <i>Méthode des directions alternées</i>	31
2.2 <i>Schéma des corrections stabilisatrices</i>	35
2.3 <i>Schéma de désintégration pour l'équation de la chaleur sans dérivée mixte (système orthogonal de coordonnées)</i>	36
2.4 <i>Schéma de désintégration pour l'équation de la chaleur avec des dérivées mixtes (système de coordonnées quelconques)</i>	40
2.5 <i>Schéma de factorisation d'un opérateur aux différences</i>	43
2.6 <i>Schéma de factorisation approchée d'un opérateur</i>	44
2.7 <i>Schéma prédicteur-correcteur</i>	46
2.8 <i>Quelques remarques à propos des schémas à pas fractionnaires</i>	49
2.8.1 Les schémas à pas fractionnaires peuvent s'appliquer aux problèmes unidimensionnels	49
2.8.2 Recopions (270) avec des indices entiers	50
2.8.3 Des schémas identiques en pas entiers peuvent donner des schémas différents en pas fractionnaires	51

2.9	<i>Conditions aux limites dans la méthode à pas fractionnaires pour l'équation de la chaleur</i>	52
3	Application de la méthode des pas fractionnaires aux équations hyperboliques	63
3.1	<i>Schémas très simples pour les équations hyperboliques unidimensionnelles</i>	63
3.1.1	Schéma du calcul courant	64
3.1.2	Schéma de la « croix »	65
3.1.3	Schéma implicite pondéré	65
3.2	<i>Schémas implicites homogènes pour les équations de type hyperbolique</i>	66
3.3	<i>Schémas implicites pour les équations polydimensionnelles hyperboliques</i>	66
3.4	<i>Schéma de désintégration à calcul courant</i>	70
3.5	<i>Méthode de factorisation approchée pour l'équation des ondes</i>	72
3.6	<i>Méthode de désintégration et schémas majorants</i>	73
4	Application de la méthode à pas fractionnaires aux problèmes aux limites des équations de Laplace et de Poisson	77
4.1	<i>Lien entre les problèmes stationnaires et d'évolution</i>	77
4.2	<i>Schémas d'intégration des problèmes d'évolution et schémas itératifs</i>	79
4.3	<i>Schémas itératifs pour les équations de Laplace à deux dimensions</i>	82
4.3.1	Schéma explicite	83
4.3.2	Schéma de relaxation le long d'une ligne	83
4.3.3	Schéma de relaxation supérieure	84
4.3.4	Schéma des directions alternées	84
4.3.5	Schéma à corrections stabilisatrices	85
4.3.6	Schéma de désintégration	86
4.3.7	Schéma prédicteur-correcteur (schéma à corrections d'approximation)	87
4.3.8	Schémas avec des opérateurs singuliers	88
4.3.9	Schémas à paramètres complémentaires	89
4.4	<i>Schémas pour l'équation tridimensionnelle de Laplace</i>	92
4.4.1	Schéma des directions alternées	92
4.4.2	Schéma de désintégration	92

4.4.3	Schéma à corrections d'approximation de Brian	93
4.4.4	Schéma à corrections stabilisatrices	94
4.4.5	Schéma de l'algorithme universel	95
4.4.6	Schéma itératif avec des paramètres complémentaires	95
4.4.7	Schéma avec des opérateurs singuliers	96
4.5	<i>Schémas itératifs pour les équations elliptiques</i>	96
4.5.1	Schéma des directions alternées	97
4.5.2	Schéma de désintégration pour $m = 2$	97
4.5.3	Schémas à corrections stabilisatrices	97
4.5.4	Schéma à corrections d'approximation	98
4.5.5	Schéma de l'opérateur majorant	99
4.5.6	Schéma de l'opérateur stabilisateur	99
4.5.7	Schéma à récurrences diagonales	100
4.6	<i>Schémas à pas variables</i>	101
4.7	<i>Schémas itératifs, basés sur les schémas d'intégration des équations hyperboliques</i>	103
4.8	<i>Résolution des problèmes aux limites de l'équation de Poisson</i>	105
4.9	<i>Schémas itératifs sur la moyenne</i>	106
4.10	<i>Réduction des schémas à consistance non totale à des schémas à consistance totale.</i>	108
5	Problèmes aux limites de la théorie de l'élasticité	111
5.1	<i>Équation de l'équilibre élastique et des oscillations élastiques</i>	111
5.2	<i>Problème aux limites de la théorie de l'élasticité</i>	113
5.2.1	Premier problème aux limites	113
5.2.2	Deuxième problème aux limites	113
5.2.3	Problème aux limites mixte	113
5.2.4	Le cas de l'équation biharmonique ou de l'équation non homogène correspondante	114
5.3	<i>Schéma d'intégration des équations d'évolution de l'élasticité</i>	114
5.4	<i>Schémas itératifs de résolution de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique</i>	115
5.4.1	Schéma de désintégration	115
5.4.2	Schémas à corrections stabilisatrices	116
5.4.3	Schéma à corrections d'approximation	116
5.4.4	Schéma à opérateur stabilisateur	117
5.4.5	Schéma de désintégration pour les systèmes d'équations harmoniques	117

5.5	<i>Schémas itératifs pour les systèmes d'équations des déplacements élastiques</i>	118
5.6	<i>Conditions aux limites pour les problèmes de l'élasticité</i>	119
6	Schémas de haute précision (S. H. P.)	123
6.1	<i>Schémas homogènes de haute précision</i>	123
6.2	<i>Schémas factorisés de haute précision pour les équations de la chaleur</i>	125
6.3	<i>Résolution du problème de Dirichlet à l'aide du S. H. P.</i>	128
7	Équations intégrro-différentielles, intégrales et algébriques	131
7.1	<i>Équation de la cinétique</i>	131
7.2	<i>Équations algébriques</i>	133
8	Quelques problèmes d'hydrodynamique	135
8.1	<i>Contournement équipotentiel</i>	135
8.2	<i>Écoulement équipotentiel d'un liquide incompressible pesant avec une frontière libre (problème du déversoir).</i>	137
8.3	<i>Écoulement d'un liquide visqueux</i>	141
8.4	<i>Méthode de l'écoulement dans les canaux</i>	145
8.5	<i>Méthode prédicteur-correcteur (méthode des correcteurs)</i>	149
8.6	<i>Équations de la météorologie</i>	151
9	Formulation générale	153
9.1	<i>Formulation générale de la méthode de désintégration — Exposé dans le cas des opérateurs commutatifs (méthode d'élimination)</i>	153
9.2	<i>Justification de la méthode de désintégration dans le cas des opérateurs non commutatifs</i>	156
9.3	<i>Méthode de factorisation approchée d'un opérateur</i>	159
9.4	<i>Méthode à corrections stabilisatrices</i>	163
9.5	<i>Méthode à corrections d'approximation</i>	165
9.6	<i>Méthode de stationnarisation</i>	166

10	Méthode de faible approximation et construction de la résolution du problème de Cauchy dans un espace de Banach	171
10.1	<i>Exemples</i>	171
10.2	<i>Approximation faible des systèmes d'équations différentielles</i> . . .	175
10.3	<i>Théorèmes de convergence</i>	184
	Bibliographie	193

