

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА НА ПОДВИЖНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА\*

Для численного решения уравнений вязкого сжимаемого теплопроводного газа, записанных в ортогональных координатах, предлагается безусловно устойчивая разностная схема, основанная на расщеплении уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям. Для повышения точности расчетов используются подвижные разностные сетки, построенные на основе вариационного принципа.

Для численного решения уравнений, описывающих течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа, к настоящему времени разработано значительное число разностных схем (см. напр., [1]). Ограничения, накладываемые на устойчивость явных схем, требуют значительных затрат машинного времени и делают их в ряде случаев неэкономичными, например при решении стационарных задач методом установления. Неявные разностные схемы (см., напр., [2]) имеют более слабые ограничения на устойчивость. Схема [3] является безусловно устойчивой, но не обладает свойством консервативности. В [4] предложена неявная безусловно устойчивая разностная схема, основанная на расщеплении исходных уравнений по физическим процессам и пространственным переменным и являющаяся консервативной в стационарном случае.

Для повышения точности расчетов обычно используются преобразования координат, сгущающие узлы разностной сетки в области больших градиентов, т.е. априори использующие информацию о решении. При решении сложных задач такая информация зачастую отсутствует, поэтому желательно использовать такие преобразования координат, которые автоматически подстраивают узлы разностной сетки к решению. Преобразование, зависящее от вектора скорости, предложено в [5]. Подвижные разностные сетки, построенные на основе вариационного принципа, рассмотрены в [6].

В настоящей работе для численного решения двумерных уравнений вязкого сжимаемого теплопроводного газа, записанных в произвольных ортогональных координатах, предлагается неявная разностная схема типа универсального алгоритма [4], реализуемая на подвижной разностной сетке [6]. Сочетание безусловно устойчивой разностной схемы и метода подвижных сеток позволяет существенно повысить точность расчетов.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Движение газа около тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки, будем описывать полными уравнениями газовой динамики с учетом эффектов вязкости и теплопроводности газа. После перехода к безразмерному виду эти уравнения в ортогональных криволинейных координатах могут быть представлены в векторной форме

$$\partial F / \partial t = -W, \quad (1.1)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} H_2 H_3 W_1 + \frac{\partial}{\partial y} H_1 H_3 W_2 + G \right\},$$

$$E = \rho (\varepsilon + (u^2 + v^2)/2),$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = \rho v H_3 d - p \frac{\partial}{\partial x} H_2 H_3 - H_2 H_3 \left\{ \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial}{\partial x} H_1^2 G_{xx} + G_{xx} \left( -\frac{2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial}{\partial y} H_1 H_2 G_{xy} + G_{xy} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{H_1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial y} + \right. \right.$$

$$+ \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial y} \left] - \frac{G_{yy}}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{G_{xx}}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x} \right\},$$

$$G_2 = \rho u H_3 d - p \frac{\partial}{\partial y} H_1 H_3 - H_1 H_3 \left\{ \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial}{\partial x} H_1 H_2 G_{xy} + \left( \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial}{\partial y} H_2^2 G_{yy} - \frac{G_{xx}}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{G_{zz}}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial y} + G_{yy} \left( -\frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial y} \right) \right) + \right.$$

$$G_{xy} = \left. \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{H_2}{H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x} \right] \right\},$$

$$G_3 = \frac{\partial}{\partial x} H_2 H_3 \left( \frac{k}{H_1} \frac{\partial T}{\partial x} + u G_{xx} + v G_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} H_1 H_3 \left( \frac{k}{H_2} \frac{\partial T}{\partial y} + u G_{xy} + v G_{yy} \right).$$

$$G_{xx} = \frac{1}{R_e} \left\{ \mu \left[ \frac{2}{H_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \operatorname{div} V \right] + \zeta' \operatorname{div} V \right\},$$

$$G_{yy} = \frac{1}{R_e} \left\{ \mu \left[ \frac{2}{H_2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \operatorname{div} V \right] + \zeta' \operatorname{div} V \right\},$$

$$G_{zz} = \frac{1}{R_e} \left\{ \mu \left[ \frac{2}{H_3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} + \frac{v}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \operatorname{div} V \right] + \zeta' \operatorname{div} V \right\},$$

$$G_{xy} = \frac{\mu}{R_e H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} u H_1 + \frac{\partial}{\partial x} u H_2 - 2 \left( u \frac{\partial H_1}{\partial y} + v \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) \right\},$$

$$\operatorname{div} V = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_2 H_3 u + \frac{\partial}{\partial y} H_1 H_3 v \right), \quad d = u \frac{\partial H_1}{\partial y} - v \frac{\partial H_1}{\partial x}.$$

Здесь  $p$  - давление;  $\rho$  - плотность;  $\epsilon$  — внутренняя энергия;  $E$  — температура;  $u, v$  — проекции вектора скорости на оси  $x, y$ ;  $\mu$  и  $\zeta$  — первый и второй коэффициенты вязкости;  $k$  - коэффициент теплопроводности;  $H_1, H_2, H_3$  — коэффициенты Ляме.

Для замыкания системы уравнений (1.1) задано уравнение состояния

$$p = p(\rho, \epsilon), \quad (1.2)$$

законы зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры

$$\mu = \mu(T), \quad \zeta' = \zeta'(T), \quad k = k(T)$$

и связь между внутренней энергией и температурой. При переходе к безразмерному виду скорости и плотности нормированы на их значения в невозмущенном набегающем потоке  $U_\infty, \rho_\infty$ , а температура — на  $U_\infty^2$ .

Течение предполагается симметричным относительно оси симметрии  $y = 0$ . Решение уравнений (1.1) - (1.3) отыскивается в одной из плоскостей, проходящих через ось симметрии и ограниченных осью симметрии, поверхностью тела, верхней границей  $R_1(x)$  и задней границей  $R_2(x)$ . На поверхности обтекаемого тела задаются условия прилипания  $u = v = 0$  и условие тепловой изоляции  $\partial T / \partial n = 0$ , где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности тела, или условие охлаждения  $T = T_w(x, y)$ . Верхняя граница  $R_1(x)$  выбирается достаточно далеко от тела таким образом, чтобы возмущения в области между телом и ударным переходом не достигали  $R_1(x)$ . В предположении затухания возмущений можно выбирать  $R_1(x)$  на расстоянии нескольких калибров тела и задавать на ней условия невозмущенного потока. На задней границе  $R_2(x)$  задавались "мягкие условия"  $\partial^2 f / \partial x^2 = 0$  или непрерывность потоков через границу  $\partial W_1 / \partial x = 0$ .

Выбор криволинейных ортогональных координат  $x, y$  в качестве исходных позволяет в рамках одного алгоритма (или программы) изучать обтекание широкого класса тел. В ряде случаев удобно, а иногда и необходимо расчетную область  $Q$  разбивать на ряд подобластей.

$$Q = \sum_{i=1}^J Q_i$$

и внутри каждой подобласти  $Q_i$  использовать свою систему координат, наиболее приспособленную к границам области или поверхности тела. Например, расчетную область, приведенную на рис. 1, удобно разбивать на две области  $Q_1$  и  $Q_2$ . В области  $Q_1$

можно использовать систему координат, связанную с поверхностью тела, или сферическую систему координат, а в области  $Q_2$  — цилиндрическую систему координат. В обеих областях расчеты проводятся по единому алгоритму (в рамках одной программы) с соответствующим изменением коэффициентов Ляме. Некоторое усложнение алгоритма, связанное с решением уравнений в ортогональных криволинейных координатах, окупается расширением класса решаемых задач и уменьшением затрат (времени программиста и машинного времени) на создание одного комплекса программ. Перерас-

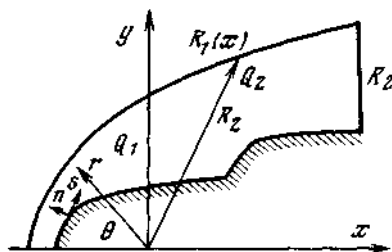


Рис. 1

чет краевых условий на границах областей при переходе от одной системы координат к другой не вызывает затруднений. Влияние краевых условий на границе  $R_2(x)$  исследуется численно.

Для удобства численного интегрирования расчетная область  $Q$ , посредством преобразования

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(xy)$$

отображается в единичный квадрат  $R \{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ . Обратное преобразование задается соотношением

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi, \eta)$$

Пространственные производные  $\partial/\partial x$  и  $\partial/\partial y$  преобразуются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = z_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + z \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = z_1 \frac{\partial}{\partial \eta},$$

где  $z_0(\xi) = \partial \xi / \partial x$ ,  $z_1(\xi, \eta) = \partial \eta / \partial y$ ,  $z(\xi, \eta) = \partial \eta / \partial x$

Систему уравнений (1.1) в новых переменных (1.4) запишем в том же виде

$$\partial F / \partial t = -W$$

где вектор  $W$  соответствует вектору  $W$  из системы уравнений (1.1) после перехода к новым переменным и записывается в виде

$$W = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} z_0 H_2 H_3 W_1 + \frac{\partial}{\partial \eta} (z H_2 H_3 W_1 + z_1 H_1 H_3 W_2) + G + H_2 H_3 W_1 \frac{\partial z_0}{\partial \xi} + H_3 (H_1 W_2 \frac{\partial z_1}{\partial \eta} + H_2 W_2 \frac{\partial z}{\partial \eta}) \right\}$$

или же в виде

$$W = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ z_0 \frac{\partial}{\partial \xi} H_2 H_3 W_1 + z \frac{\partial}{\partial \eta} H_2 H_3 W_1 + z_1 \frac{\partial}{\partial \eta} H_1 H_3 W_2 + G \right\}.$$

Выбрав в качестве искоемых функций вектор  $f$  с компонентами  $(p, u, v, \epsilon)$ , представим (1.6) в недивергентной форме в виде расщепления по физическим процессам и пространственным переменным [4].

$$\partial f / \partial t = -\Sigma \Omega_i f + H$$

Дифференциальные матричные операторы  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  учитывают члены переноса и вязкие члены (без учета смешанных производных) в направлении  $\xi$  и  $\eta$  соответственно, а  $\Omega_3$  и  $\Omega_4$  — члены с давлением и свободные члены в уравнениях движения и члены вида  $\text{div } V$  в уравнениях неразрывности и энергии по каждому направлению. Оставшиеся члены уравнений учтены в векторе  $H$ . Пусть  $E$  — единичная матрица. Тогда операторы  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  могут быть представлены в виде

$$\Omega_1 = \left\{ z_0 \frac{u}{H_1} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{z_0}{d_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} z_0 q_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} z_0 q_2 \frac{\partial}{\partial \xi} H_2 H_3 \right] \right\} E,$$

$$\Omega_2 = \left\{ \left( z \frac{u}{H_1} + z_1 \frac{v}{H_2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{z}{d_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} z q_1 + \frac{\partial}{\partial \eta} z q_2 \frac{\partial}{\partial \eta} H_2 H_3 \right] + \right. \\ \left. + \frac{z_1}{d_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} z_1 q_3 \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} z_1 q_4 \frac{\partial}{\partial \eta} H_1 H_3 \right] \right\} E,$$

где

$$q_1 = \frac{H_2 H_3 \mu}{H_1} \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \gamma / \text{Pr} \end{vmatrix}, \quad q_2 = \frac{\zeta' - 2\mu/3}{H_1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$q_3 = \frac{H_1 H_3 \mu}{H_2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \gamma / \text{Pr} \end{vmatrix}, \quad q_4 = \frac{\zeta' - 2\mu/3}{H_2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = H_1 H_2 H_3, \quad d_0 = \rho d_1 Re.$$

Для простоты изложения при записи операторов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  использована зависимость между температурой и внутренней энергией в виде  $\epsilon = c_v T$ , а коэффициент теплопроводности выражен через коэффициент вязкости по формуле  $\kappa = \gamma \mu / \text{Pr}$ , где  $\gamma = c_p / c_v$ ,  $\text{Pr}$  – число Прандтля. После исключения давления из исходных уравнений (1.6) с помощью уравнения состояния (1.2) дифференциальные операторы  $\Omega_3$  и  $\Omega_4$  представим в виде

$$\Omega_3 = \begin{vmatrix} \frac{\rho}{d_1} z_0 \frac{\partial}{\partial \xi} H_2 H_3 u \\ \frac{z_0}{H_1} \left[ a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + b^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \right] + dv \\ -du \\ \frac{c^2}{d_1} z_0 \frac{\partial}{\partial \xi} H_2 H_3 u \end{vmatrix},$$

$$\Omega_4 f = \begin{vmatrix} \frac{\rho}{d_1} \left[ z \frac{\partial}{\partial \eta} H_2 H_3 u + z_1 \frac{\partial}{\partial \eta} H_1 H_3 v \right] \\ \frac{z}{H_1} \left[ a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + b^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right] \\ \frac{z_1}{H_2} \left[ a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + b^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right] \\ \frac{c^2}{d_1} \left[ z \frac{\partial}{\partial \eta} H_2 H_3 u + z_1 \frac{\partial}{\partial \eta} H_1 H_3 v \right] \end{vmatrix}$$

$$a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \epsilon}, \quad c^2 = \frac{p}{\rho},$$

$$d = z_1 u \frac{\partial H_1}{\partial \eta} - v \left( z_0 \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + z \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \right).$$

Свободные члены, возникшие в уравнениях вследствие выбора криволинейных координат, учитываются в операторе  $\Omega_3$ . Более естественно было бы учитывать их в операторах  $\Omega_3$  и  $\Omega_4$ , однако это приводило бы к некоторому усложнению при реализации разностной

схемы. Из-за громоздкости выражений для векторов  $W$  и  $H$  их вид в новых переменных не приводится.

Система уравнений (1.6) может быть представлена в виде, разрешенном относительно вектора  $f$

$$\partial f / \partial t = BW,$$

где

$$f = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \left( \frac{\partial F}{\partial f} \right)^{-1} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ -(\varepsilon + (u^2 + v^2)/2) & -u & -v & 1 \end{pmatrix}$$

Системы уравнений (1.7) и (1.8) в дифференциальном виде эквивалентны. Но при получении стационарного решения методом установлений система (1.8) является консервативной (матрица  $B$  невырожденная, а вектор  $W$  записан в дивергентном виде). Поэтому при построении разностной схемы в качестве исходных уравнений используется система (1.8).

Обратное преобразование координат  $x = x(\xi)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  будем находить на основе вариационного принципа, предложенного в [6].

Потребуем, чтобы в каждый момент времени выполнялось соотношение

$$(|\partial q / \partial y|^\beta + \varepsilon) \partial y / \partial \eta = const, \quad q = |u| + |v| + |\rho| + |\varepsilon|, \quad (1.9)$$

означающее, что в области больших градиентов функций в направлении  $\eta$  градиенты сетки малы. Выбором коэффициента  $\beta$  задается необходимое сгущение координатных линий, а параметр  $\varepsilon$  выбирается отличным от нуля во избежание особенности при  $\partial q / \partial \eta = 0$ .

Координату  $y(\xi, \eta)$  удобнее находить из решения параболического уравнения методом установления со стационарными краевыми условиями

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right|^\beta + \varepsilon \right) \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (1.10)$$

Очевидно, обратное преобразование невырожденное. Преобразование координат  $\xi = \xi(x)$  можно задавать линейным или зависящим, например, от формы обтекаемого тела. По аналогии с (1.9) обратное преобразование  $x = x(\xi)$  может быть найдено из стационарного

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\delta |K|^\beta + \varepsilon) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (1.11)$$

со стационарными краевыми условиями  $x(0) = 0$  и  $x(1) = x_0$ . Здесь  $K(x)$  - продольная кривизна поверхности тела. После нахождения обратного преобразования  $x = x(\xi)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  определяются значения коэффициентов преобразования

$$z_0(\xi) = (\partial x / \partial \xi)^{-1}, \quad z_1(\xi, \eta) = (\partial y / \partial \eta)^{-1}, \quad z(\xi, \eta) = -z_0 z_1 \partial y / \partial \xi$$

Уравнения (1.10) и (1.11) решаются на каждом временном шаге.

## 2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Введем в области  $R_H = R \times H$ , где  $R$  - единичный квадрат,  $H = [0, T]$ ,  $t \in H$ , разностную сетку с постоянными пространственными шагами  $h_1$  и  $h_2$   $Q_{i_1}$  ( $h_1 = 1/I$ ,  $h_2 = 1/K$ ,  $I, K$  - число узлов разностной сетки в направлении  $\xi$  и  $H$ ) и временным шагом  $\tau$  (или итерационным шагом при решении уравнений методом установления). Определим в узлах разностной сетки  $(n, i_1, i_2)$  сеточные функции  $p_{i_1}^n, u_{i_1}^n, v_{i_1}^n \in E_{i_1}^n$ . Введем сеточную вектор-функцию  $f_{i_1}^n = f_{i_1}(t_n, i_1 h_1, i_2 h_2)$  с компонентами  $\rho_{i_1}^n, u_{i_1}^n, v_{i_1}^n \in E_{i_1}^n$ .

Первые производные по направлениям  $\xi$  и  $\eta$  аппроксимируем несимметричными разностными операторами  $\Lambda_p^k$  с порядком  $k = 1, (2)$  или симметричными операторами  $\Lambda_p$  второго порядка аппроксимации. Индекс  $p = 1 (2)$  соответствует направлению  $\xi (H)$ . При  $p = 1$  разностные операторы имеют вид

$$\Lambda_{1 \pm}^1 g_{i_1} = \pm \frac{1}{h_1} (g_{i_1} - g_{i_1 \pm 1}), \quad \Lambda_{1 \pm}^2 g_{i_1} = \pm \frac{1}{2h_1} (3g_{i_1} - 4g_{i_1 \pm 1} + g_{i_1 \pm 2}),$$

$$a \Lambda_{1 \pm}^k = \frac{1}{2} (a + |a|) \Lambda_{1 \pm}^k + \frac{1}{2} (a - |a|) \Lambda_{1 \mp}^k, \quad \Lambda_1 = \frac{1}{2} (\Lambda_{1-}^1 + \Lambda_{1+}^1).$$

Аналогично вводятся разностные операторы  $\Lambda^{2+}, \Lambda_2$ . Вторые производные аппроксимируем симметричными разностными операторами на трехточечном или девятиточечном шаблоне по формулам

$$\Lambda_1 a \Lambda_1 g_{i_1} = h_1^{-2} \left[ a_{i_1+\frac{1}{2}} (g_{i_1+1} - g_{i_1}) - a_{i_1-\frac{1}{2}} (g_{i_1} - g_{i_1-1}) \right],$$

$$a_{i_1 \pm \frac{1}{2}} \Lambda_1 b \Lambda_1 g_{i_1}, g_{i_2} = \frac{1}{4h_1 h_2} [b_{i_1+1, i_2} (g_{i_1+1, i_2} - g_{i_1+1, i_2-1}) - b_{i_1-1, i_2} (g_{i_1-1, i_2} - g_{i_1-1, i_2-1})].$$

Введем разностные матричные операторы  $\Omega_{jh}^k$ ; аппроксимирующие дифференциальные операторы  $\Omega_j, j = 1, 2, 3, 4$ , с порядком  $k$ . С учетом введенных выше обозначений разностные операторы  $\Omega_{jh}^k$  представляются в виде

$$\Omega_{1h}^k = \left\{ a_1^n \Lambda_{1\pm}^k - \frac{z_{0h}^n}{d_{0h}} [\Lambda_1 (z_0 q_1)_h^n \Lambda_1 + \Lambda_1 (z_0 q_2)_h^n \Lambda_1 (H_2 H_3)_h] \right\} E,$$

$$\Omega_{2h}^k = \left\{ a_2^n \Lambda_{2\pm}^k - \frac{z_h^n}{d_{0h}} [\Lambda_2 (z q_1)_h^n \Lambda_2 + \Lambda_2 (z q_2)_h^n \Lambda_2 (H_2 H_3)_h] \right\} +$$

$$+ \frac{z_{1h}}{d_{0h}} [\Lambda_2 (z_1 q_3)_h^n \Lambda_2 + \Lambda_2 (z_1 q_4)_h^n \Lambda_2 (H_1 H_3)_h] \left\} E,$$

$$\Omega_{3h}^k f_h = \left\| \begin{array}{l} (\rho_h^n / d_1) z_{0h}^n \Lambda_{1\pm}^k (H_2 H_3 u)_h \\ (z_{0h}^n / H_1 [a_h^2 \Lambda_{1\pm}^k \rho_h + b_h^2 \Lambda_{1\pm}^k \varepsilon_h] + d_h v_h \\ -d_h u_h \\ (c_h^2 / d_1) z_{0h}^n \Lambda_{1\pm}^k (H_2 H_3 u)_h \end{array} \right\|,$$

$$\Omega_{4h}^k f_h = \left\| \begin{array}{l} (\rho_h^n / d_1) [z_h \Lambda_{2\pm}^k (H_2 H_3 u)_h + z_{1h} \Lambda_{2\pm}^k (H_1 H_3 v)_h] \\ (z_h / H_1 [a_h^2 \Lambda_{2\pm}^k \rho_h + b_h^2 \Lambda_{2\pm}^k \varepsilon_h] \\ z_h / H_2 [a_h^2 \Lambda_{2\pm}^k \rho_h + b_h^2 \Lambda_{2\pm}^k \varepsilon_h] \\ (c_h^2 / d_1) [z_h \Lambda_{2\pm}^k (H_2 H_3 u)_h + z_{1h} \Lambda_{2\pm}^k (H_1 H_3 v)_h] \end{array} \right\|,$$

Здесь  $d_h = (z_1 u \Lambda_2 H_1)_h - v_h (z_0 \Lambda_2 H_2 + z \Lambda_2 H_2)_h$ ,  $a_1 = (z_0 u / H_1)_h$ ,  $a_2 = (z u / H_1 + z_1 v / H_2)_h$ ,  $d_{0h} = \text{Rep}_h^n d_{1h}$ ,  $d_{1h} = (H_1 H_2 H_3)_h$ . Члены с давлением в операторах  $\Omega_{3h}^k$  и  $\Omega_{4h}^k$  аппроксимируются по формулам сопряженным к конвективным членам. Такая аппроксимация разностных операторов  $\Omega_{3h}^k$  и  $\Omega_{4h}^k$  позволяет, как показывает анализ устойчивости, построить безусловно устойчивую разностную схему.

Вектор  $W$  уравнений (1.8) аппроксимируем в узлах сетки вектором  $W_h$ : вторые производные аппроксимируем разностными операторами, а векторы  $W_1$  и  $W_2$  - несимметричными операторами  $W_{ih}$ , согласованно с аппроксимацией операторов  $\Omega_{ih}^k$ . В случае одномерных уравнений газовой динамики разностная аппроксимация вектора  $W$  подробно рассмотрена в [4].

Для численного решения системы (1.8) рассмотрим разностную схему расщепления по физическим процессам и пространственным переменным:

$$\begin{aligned} (E + \alpha_1 \Omega_{1h}^l) \xi^{n+1/4} &= -\tau B_h^n (W_h^n)^k, & (E + \alpha_2 \Omega_{2h}^l) \xi^{n+2/4} &= \xi^{n+1/4}, \\ (E + \alpha_3 \Omega_{3h}^l) \xi^{n+3/4} &= \xi^{n+2/4}, & & \\ (E + \alpha_4 \Omega_{4h}^l) \xi^{n+1} &= \xi^{n+3/4}, & f_h^{n+1} &= f_h^n + \xi^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

После исключения дробных шагов в (2.1) получим разностную схему типа универсального алгоритма

$$C^l (f_h^{n+1} - f_h^n) / \tau = -B_h^n (W_h^n)^k, \quad C^l = \prod_{j=1}^4 (E + \alpha_j \Omega_{jh}^l) \quad (2.2)$$

Весовые множители  $\alpha_j$  выбираются из условия устойчивости разностной схемы. Разностная схема (2.2) или эквивалентная ей (2.1) аппроксимирует систему (1.8) с порядком  $O(\tau + h^l)$ , а при установлении - с порядком  $O(h^k)$ , где  $h = \max(h_1, h_2)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$ .

Стабилизирующий оператор  $C^l$  назовем согласованным, если  $k = l$  и несогласованным в противном случае. На каждом дробном шаге  $n + j/4$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , разностная схема (2.1) реализуется трехточечными ( $l = 1$ ) или пятиточечными ( $l = 2$ ) скалярными прогонками.

При получении стационарного решения методом установления в качестве стабилизирующего оператора выбирается несогласованный оператор  $C^l$ . Тогда разностная схема (2.1) реализуется трехточечными прогонками, при установлении имеет погрешность аппроксимации  $O(h^k)$  ( $k = 1, 2$ ) и обладает свойством консервативности: матрица  $B^n$  невырожденная, а стационарные уравнения  $(W^n)^k = 0$  записаны в виде выполнения разностных законов сохранения.

Рассмотрим реализацию схемы на дробных шагах. На первом и втором дробных шагах все разностные уравнения для компонент вектора  $\xi = \xi(\xi_p, \xi_u, \xi_v, \xi_\varepsilon)$  относительно верхнего временного слоя могут быть решены независимо один от другого скалярными прогонками, так как матрицы  $\Omega_{1h}^l$  и  $\Omega_{2h}^l$  имеют ненулевые элементы лишь на главной диагонали и аппроксимируются на шаблоне из  $2l + 1$  точек. На третьем дробном шаге система разностных уравнений

$$\begin{aligned}\xi_\rho^{n+3/4} &= \xi_\rho^{n+3/4} - \frac{\tau \alpha_3 z_{0h}^n \rho_h^n}{d_{1h}} \Lambda_{1\pm}^l (H_2 H_3)_h \xi_\rho^{n+3/4}, \\ \xi_u^{n+3/4} &= \xi_u^{n+3/4} - \alpha_3 \frac{\tau z_{0h}^n}{H_1} \left\{ a_h^2 \Lambda_{1\pm}^l \xi_\rho^{n+3/4} + b_h^2 \Lambda_{1\pm}^l \xi_\rho^{n+3/4} \right\} - \alpha_3 \tau d_n \xi_v^{n+3/4}, \\ \xi_v^{n+3/2} &= \xi_v^{n+2/4} + \alpha_3 \tau d_n \xi_u^{n+3/4}, \\ \xi_\varepsilon^{n+3/4} &= \xi_\varepsilon^{n+2/4} - \frac{\alpha_3 \tau z_{0h}^n c_h^2}{\alpha_{1h}} \Lambda_{1\mp}^l (H_2 H_3)_h \xi_u^{n+3/4},\end{aligned}$$

решается в следующем порядке: исключая  $\xi_\rho^{n+3/4}$ ,  $\xi_v^{n+3/4}$ ,  $\xi_\varepsilon^{n+3/4}$  из уравнения для  $\xi_u^{n+3/4}$ , получаем  $(2l + 1)$ -точечное разностное уравнение

$$\begin{aligned}\xi_u^{n+3/4} + \tau^2 \alpha_3^2 \xi_u^{n+3/4} - \frac{\tau^2 \alpha_3^2 z_{0h}^n}{H_1} \left\{ \alpha_h^2 \Lambda_{1\pm}^l \frac{z_{0h}^n \rho_h^n}{d_{1h}} \Lambda_{1\pm}^l + \right. \\ \left. + b_h^2 \Lambda_{1\pm}^l \frac{z_{0h}^n c_h^2}{\alpha_{1h}} \Lambda_{1\pm}^l \right\} (H_2 H_3)_h \xi_u^{n+3/4} = \xi_n^{n+2/4} - \\ - \frac{\tau \alpha_3 z_{0h}^n}{H_1} \left[ a_h^2 \Lambda_{1\pm}^l \xi_\rho^{n+2/4} + b_h^2 \Lambda_{1\pm}^l \xi_\varepsilon^{n+2/4} \right] - \tau \alpha_3 \xi_v^{n+2/4}\end{aligned}$$

Решая его прогонкой, находим  $\xi_u^{n+3/4}$ , после чего по известному  $\xi_u^{n+3/4}$  определяем  $\xi_\rho^{n+3/4}$ ,  $\xi_v^{n+3/4}$ ,  $\xi_\varepsilon^{n+3/4}$ . На четвертом дробном шаге система разностных уравнений решается аналогично третьему дробному шагу исключив  $\xi_\rho^{n+1}$ ,  $\xi_u^{n+1}$ ,  $\xi_v^{n+1}$  из уравнения для  $\xi_v^{n+1}$ , получим относительно  $\xi_v^{n+1}$  разностное уравнение на  $(2l + 1)$ -точечном шаблоне. Найдя  $\xi_v^{n+1}$ , определим новые значения  $\xi_\rho^{n+1}$ ,  $\xi_u^{n+1}$ ,  $\xi_\varepsilon^{n+1}$ . Наконец, найдя вектор  $\xi^{n+1}$ , из последнего уравнения (2.1) определим значение всех искомых функций на слое  $n + 1$ . На этом расчет одного шага по времени заканчивается, после чего процедура вычислений повторяется.

При  $k = 2$  или  $l = 2$  система разностных уравнений (2.1) аппроксимируется на пяти-точечном шаблоне, поэтому возникает необходимость доопределения функций в фиктивных граничных точках. Значения функций в фиктивных точках находятся путем экстраполяции по внутренним узлам по формулам

$$f_{-1} = 3(f_0 - f_1) + f_2, \quad f_{N+1} = 3(f_N - f_{N-1}) + f_{N-2},$$

что соответствует изменению несимметричной аппроксимации в приграничных точках на симметричную. Введением фиктивных точек достигается однородность разностной схемы без понижения порядка аппроксимации.

Для реализации краевых условий строится разностная схема типа основной (2.1).

Рассмотрим для примера аппроксимацию уравнения неразрывности на поверхности тела  $\eta = 0$ . С учетом условий прилипания  $u_h^s = v_h^s = \xi_u^s = \xi_v^s = 0$ ,  $s = n + j/4$ , разностная схема (2.1) при  $\eta = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned}\xi_\rho^{n+1/4} &= - \frac{\tau \alpha_4}{d_{1h}} \left[ z_h^n \Lambda_{2+}^2 (H_2 H_3 u)_h^n + z_{1h}^n \Lambda_{2+}^2 (H_1 H_3 v)_h^n \right], \\ \xi_\rho^{n+2/4} &= \xi_\rho^{n+3/4} = \xi_\rho^{n+1/4}, \\ \xi_\rho^{n+1} &= \xi_\rho^{n+3/4} - \alpha_4 \frac{\tau \rho_h^n}{d_{1h}} \left[ z_h^n \Lambda_{2+}^l (H_2 H_3)_h \xi_u^{n+1} + z_{1h}^n \Lambda_{2+}^l (H_1 H_3)_h \xi_v^{n+1} \right],\end{aligned}$$

Заметим, что свободные члены в (2.1) учитываются неявно на верхнем слое в операторе  $\Omega_3$ . При учете их на нижнем слое явно разностная схема может оказаться условно устойчивой.

Для численного решения уравнений для сетки (1.10). (1.11) применялась неявная разностная схема

$$(y_{i_2}^{n+1} - y_{i_2}^n) / \tau = \Lambda_2 b \Lambda_2 y_{i_2}^{n+1}, \quad (x_{i_1}^{n+1} - x_{i_1}^n) / \tau = \Lambda_1 a \Lambda_1 x_{i_1}^{n+1}, \quad (2.3)$$

со стационарными краевыми условиями. После получения стационарного решения численно определялись значения коэффициентов преобразования  $z_0$ ,  $z$  и  $z_l$  в узлах сетки со вторым порядком.

Методом Фурье проведено исследование устойчивости разностной схемы (2.2) для системы линейных уравнений, полученных линеаризацией исходных уравнений (1.6). Анализ устойчивости показал, что разностная схема (2.2) для системы линейных уравнений безусловно устойчива в случае согласованного оператора  $C^k$  при  $\alpha_j \geq 1/2$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) и при  $\alpha_j \geq 1$  - для несогласованного оператора. Ввиду громоздкости доказательство устойчивости не приводится. Численные расчеты, проведенные по схеме (2.2), показали, что устойчивость сохраняется и при решении системы нелинейных уравнений (1.6). При численной проверке разностной схемы (2.2) на устойчивость итерационный параметр  $\tau$  изменялся в широких пределах от  $h_2/2$  до  $20h_2$ , что соответствовало числам Куранта  $K$  от  $\sim 1$  до  $\sim 20$ . Во всех случаях устойчивость разностной схемы не нарушалась однако наиболее быстрая сходимость к стационарному решению (200 - 350 итераций) была при  $K \approx 3 \div 5$ . В качестве тестовой задачи рассматривалось обтекание затупленного по сфере цилиндра сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа. При расчетах головной скачок не выделялся. Весовые множители выбирались равными единице. В случае несогласованного оператора  $C^1$  ( $K = 2$ ) при больших числах  $Re$  вследствие сильной немонотонности численного решения наблюдалось нарушение устойчивости. При введении подвижной сетки, сгущающей координатные линии в зоне ударного перехода, разностная схема оставалась устойчивой и при больших числах Рейнольдса. Некоторые результаты расчетов приведены в разд. 4.

### 3. ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

При создании программы предусматривалась возможность дальнейшей модификации алгоритма и расширение класса решаемых задач. С этой целью при написании программы использовался модульный принцип [7]. Опишем состав расчетных модулей для рассмотренной выше разностной схемы на примере задачи обтекания. Выделены основные модули, или блоки.

1, БНД – блок начальных данных. В нем задаются начальные распределения газодинамических функций, определяются границы области и вводятся необходимые расчетные параметры (числа Маха, Рейнольдса, Прандтля и т.д.). заданием параметра фиксируется выбранная система координат, и вычисляются значения коэффициентов Ламе. В качестве начальных данных в расчетной области  $Q_i$  (после преобразования координат  $Q_i$  – единичный квадрат) задавался невозмущенный поток, а на теле – краевые условия; вычислялись начальные значения коэффициентов преобразования и итерационного параметра  $\tau_0$ , равного  $R/2k$ , где  $k$  – число узлов разностной сетки по  $\eta$ , а  $R$  – расстояние от поверхности тела до верхней границы при  $\xi = 0$ .

2, БС – блок сетки. По известному распределению газодинамических функций из решения уравнений (2.3) определяются новые значения координат  $x$  и  $y$ , соответствующие

узлам сетки ( $i_1, i_2$ ), вычисляются в узлах разностной сетки новые значения коэффициентов Ламе и коэффициенты преобразования  $z_0, z$  и  $z_l$ . При решении задачи (2.2) на установление разностных уравнения (2.3) на каждом итерационном шаге решаются как нестационарные и делается одна-две итерации. Важно, чтобы разностные уравнения для сетки (2.3) и система разностных уравнений (2.2) сходились одновременно. Это может быть достигнуто выбором итерационного шага в уравнении для сетки. Итерационный шаг  $\tau$  для решения разностных уравнений (2.2) выбирался неравномерным, возрастающим за 50 - 100 шагов от  $\tau = \tau_0$  до  $\tau = 5 \div 8 \tau_0$ .

3, БПЧ - блок правых частей. В нем производится вычисление значений всех компонент вектора  $B_h^n (W_h^n)^k$  на  $n$ -м слое во всех точках расчетной области, включая границы.

При аппроксимации уравнений (2.2) со вторым порядком по формулам (2.3) вычисляются значения искомого функций в граничных точках. Определяются значения коэффициентов вязкости. Значения компонент вектора  $B_h^n (W_h^n)^k$  зачисляются в элементы массивов вектора  $\xi^{n+1/4}$ .

4, БО - блок стабилизирующего оператора, служит для нахождения функций на промежуточных дробных шагах  $n + j/4$ . Разностные уравнения решаются скалярными прогонками, вычисляются краевые условия для  $\xi^{n+j/4}$  определяются новые значения искомого функций  $f^{n+1}$  на  $(n + 1)$ -м слое.



5. БВ - блок вывода и обработки информации. В нем на основе заложенного критерия установления

$$|(f^{n+1} - f^n) / \tau| \leq \epsilon \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$$

проверяется выход численного решения на стационарный режим во всех точках расчетной области. Организуется контроль точности расчетов: проверяется выполнение законов сохранения в контрольных объемах. По найденным значениям функций вычисляются требуемые, аэродинамические коэффициенты, организуется процедура вывода на печать газодинамических полей в удобном виде. При необходимости результаты расчетов выдаются в виде графиков. Вывод полей газодинамических величин может осуществляться по счетчику шагов.

6. БСО - блок сегментации. При обтекании тел сложной конфигурации или сильно удлиненных тел производится разбиение расчетной области на ряд подобластей. Для  $i > 1$  выбирается система координат и вычисляются значения коэффициентов Ламе. С целью уменьшения влияния приближенных граничных условий в области  $Q_i$  сеточные подобласти  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$  имеют общее пересечение. Краевые условия в начальном сечении  $x_0$  подобласти  $Q_{i+1}$  берутся из полученного численного решения в подобласти  $Q_i$  при том же значении  $x_0$ . Программа предусматривает решение в любой отдельной подобласти  $Q_{i+1}$ . В этом случае граничные условия во входном сечении  $x_0$  задаются вводом необходимых массивов данных. Для получения начальных данных в подобласти  $Q_{i+1}$  значения функций в сечении  $x_0$  продолжают на всю подобласть.

В зависимости от типа решаемых задач отдельные модули могут быть исключены из программы (например, БСО или БНД). Обращение к БНД и БСО происходит однократно или равно числу рассчитываемых подобластей, а к БС, БПЧ, БО - на каждом итерационном шаге. Обращение к БВ происходит в конце счета или по счетчику шагов. Вся программа находится в оперативной памяти машины БЭСМ-6 и реализована на языке АЛЬФА-6.

#### 4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

По рассмотренной выше разнесшей схеме с использованием подвижной сетки проведены численные расчеты обтекания осесимметричных тел сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов обтекания затупленного по сфере цилиндра и невыпуклого тела.

В первом случае выбрана "естественная" система координат ( $x$  - длина дуги, отсчитываемая от оси симметрии тела,  $y$  - внешняя нормаль к поверхности тела). Внешняя граница области  $R_l(x)$  задавалась по формуле

$$R_l(x) = a + (b - a) \xi^\alpha,$$

где  $\alpha = 4/3$ ,  $a$ ,  $b$  - расстояние от поверхности тела до внешней границы при  $x = 0$  и  $x = x_0$ ,

и на ней задавались условия набегающего потока. По  $\xi$  было выбрано 19, а по  $\eta$  - 20 точек. Шаг сетки в направлении оси  $x$  выбирался равномерным, а по  $y$  - находился из решения уравнения для сетки (2.3), где  $b = |u^2 + v^2|^{\beta/2} + \epsilon$ . Параметр  $\beta$  изменялся от 0,2 до 1,0 за 60 - 80 шагов, после чего выбиралось  $\beta = 1,0$ , а  $\epsilon$  - порядка  $h_2$ . На рис. 2 приведено распределение нормальной компоненты скорости  $u$  и на оси симметрии для различных  $Re$  ( $\infty$  (0);  $10^4$  (1);  $3 \cdot 10^3$  (2);  $10^3$  (5);  $5 \cdot 10^2$  (4)) у затупленного по сфере цилиндра при  $M = 6$ ,  $\omega = 0,75$ ,  $Pr = 0,72$ ,  $\partial T / \partial n = 0$ . Распределение коэффициента трения по телу для различных  $Re$  ( $10^4$  (1);  $3 \cdot 10^3$  (2);  $10^3$  (3);  $5 \cdot 10^2$  (4)) дано на рис. 3 (параметры набегающего потока те же, что и на рис. 2). На рис. 4 приведена расчетная сетка, полученная в процессе решения при установлении для  $M = 25$ ,  $Pr = 0,72$ ,  $\omega = 3/4$ ,  $\gamma = 1,2$ ,  $Re = 3 \cdot 10^3$ . В области затупления происходит резкое сгущение узлов разностной сетки в зоне ударного перехода и пограничного слоя. В качестве второго примера рассмотрено обтекание невыпуклого тела (рис. 5). Затупление образовано гладким сопряжением трех окружностей радиуса 1 с центрами ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ;  $\alpha = 1, \beta = 2$ ;  $\alpha = 3, \beta = 2$ , где  $\alpha, \beta$  - декартовы координаты). Для расчетов

выбрана сферическая система координат с подвижным центром  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 3,262$ . На рис. 5 приведена расчетная сетка при обтекании невыпуклого охлаждаемого тела потоком вязкого газа при  $M = 15$ ,  $\gamma = 1,2$ ,  $\omega = 0,5$ ,  $Re = 3 \cdot 10^3$ ,  $Pr = 0,72$ ,  $T_\omega = 5,4$  ( $T_\omega$  - температура поверхности). В невыпуклой области образуется отрывное течение с вихрем. Характеристики течения при  $\theta = 43^\circ$  приведены на рис. 6.

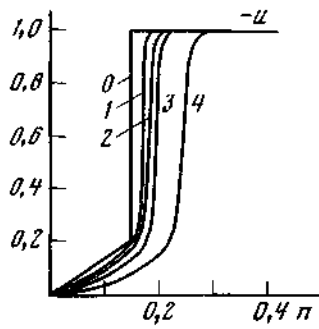


Рис. 2

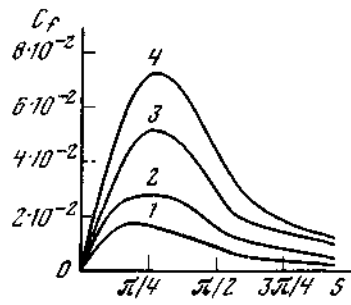


Рис. 3

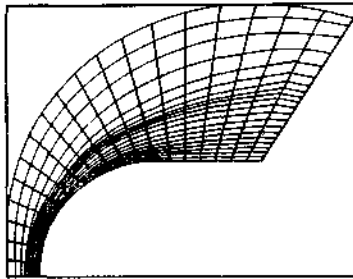


Рис. 4

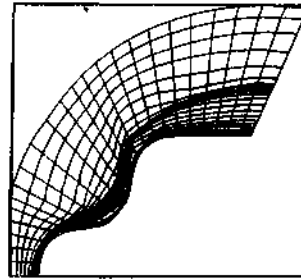


Рис. 5

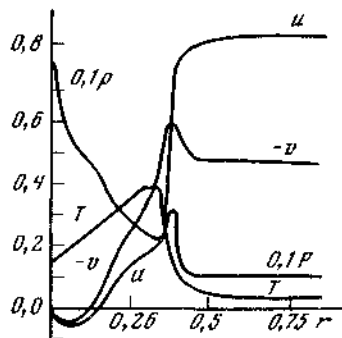


Рис. 6

В процессе получения решения методом установления при  $Re/M^2 \omega > 10^3$  наблюдалось колебание узлов подвижной разностной сетки и решение не выходило на стационарный режим. Для получения стационарного решения после 200 - 250 итерационных шагов разностная сетка фиксировалась, после чего решение быстро ( $\sim 50 \div 100$  шагов) выходило на стационарный режим. Автоколебательный режим связан, по-видимому, с сильным искажением координатной сетки либо с приближенным вычислением узлов разностной сетки. На наш взгляд, для расчета течений в сложных областях необходимо использовать сгущение по двум направлениям.

Для сравнения были проведены расчеты обтекания указанных выше задач с фиксированной равномерной разностной сеткой, показавшие сильное размывание областей с большими градиентами. Например, при обтекании невыпуклого тела вихрь на равномерной сетке не образуется.

Проведенные расчеты позволяют сделать вывод об эффективности, предложенной неявной разностной схеме и метода подвижных сеток.

\*Журнал вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 174-188. (Соавтор В.М. Ковеня.)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Численное исследование современных задач газовой динамики / Под ред. О.М. Белоцерковского, М.: Наука, 1974.
2. Полежаев В.И. Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 34-44.
3. Березин Ю.А., Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Об одной неявной схеме расчета течения вязкого теплопроводного газа // Числ. методы механики сплош. среды. 1972. Т. 3, № 4. С. 3-18.
4. Яненко Н.М., Ковеня В.М. Разностная схема для решения многомерных уравнений газовой динамики // ДАН СССР. 1977. Т. 232, № 6. С. 1273-1276.
5. Толстых А.И. О методе численного решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Там же. 1973. Т. 210, № 1. С. 48-51.

6. Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток // Числ. методы механики сплош. среды. 1977.Т. 8, №4. С. 157-163.
7. Коновалов А.Н., Яненко Н.Н. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды // Комплексы программ математической физики. Новосибирск, 1972. С. 48-54.