

**О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С  
БОЛЬШИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ\***

1. Многообразие численных алгоритмов решения задач газовой динамики возникает из выбора схем расчета и сетки. Подразделяя алгоритмы по выбору сетки, мы имеем следующие основные группы,

- а. Метод характеристик (гладкая область) [1, 4, 5].
- б. Схемы в эйлеровых координатах (неподвижная сетка) [2, 3, 28].
- в. Схемы в лагранжевых координатах [6, 10, 29].
- г. Схемы в эйлерово-лагранжевых координатах [7, 9, 11].
- д. Подвижная эйлерова сетка [12].
- е. Метод частиц [8, 13].

Метод частиц в ячейках [8] использует неподвижную эйлерову сетку, сохраняя и информацию о траекториях частиц.

В данной работе мы остановимся в основном на методе частиц в ячейках и рассмотрим некоторые вопросы теории разностных схем в эйлеровых и лагранжевых координатах.

2. Анализ метода частиц в ячейке, идущего от работ Харлоу и его сотрудников [30], привел нас к выводу, что существует тесная связь между методом частиц в ячейке и методом расщепления и что, по существу, метод частиц представляет собой своеобразную и остроумную модификацию метода расщепления. То разделение алгоритма на два этапа, которое имеется в методе частиц, есть не что иное, как расщепление схемы на два дробных шага. Интерпретация метода частиц в терминах метода расщепления облегчает математическую формализацию и анализ такого сложного алгоритма как метод частиц. Мы будем пользоваться дифференциальной формулировкой метода расщепления (см. обзор работ в [14]). На самом деле схема расщепления осуществляется для законов сохранения и лишь для простоты мы используем дифференциальную форму.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение газа в переменных Эйлера в форме законов сохранения имеют вид

$$\frac{\partial(\rho r^\nu)}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial r} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial mu}{\partial r} + \frac{\partial mv}{\partial z} + \frac{\partial Pr^\nu}{\partial r} = P\nu r^{\nu-1},$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial r} + \frac{\partial nv}{\partial z} + \frac{\partial Pr^\nu}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Eu}{\partial r} + \frac{\partial Ev}{\partial z} + \frac{\partial(Pr^\nu u)}{\partial r} + \frac{\partial(Pr^\nu v)}{\partial z} = 0, \quad P = F(\rho, \epsilon),$$

где  $\rho$  — плотность,  $P$  — давление,  $\epsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $u, v$  - компоненты скорости по направлениям  $r, z$ ,  $m = pr^\nu u$ ,  $n = pr^\nu v$ ,  $E = pr^\nu(\epsilon + (u^2 + v^2)/2)$ ;  $\nu = 0$  для плоского движения,  $\nu = 1$  для движения с осевой симметрией;  $(r, z)$  - декартовы или цилиндрические координаты (в последнем случае ось  $z$  направлена по оси симметрии),  $t$  - время. Мы можем уравнения первого и второго дробного шагов (этапов, по Харлоу записать в виде

$$\begin{array}{l} \text{а:} \\ \frac{\partial(\rho r^\nu)^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad \text{б:} \\ \frac{\partial(\rho r^\nu)^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial m^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial n^{(2)}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial m^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(Pr^\nu)^{(1)}}{\partial r} = \nu P^{(1)} r^{\nu-1}, \quad \frac{\partial m^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial(mu)^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial(mv)^{(2)}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(Pr^\nu)^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial n^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial(nu)^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial(nv)^{(2)}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(Pr^\nu u)^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial(Pr^\nu v)^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial(Eu)^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial(Ev)^{(2)}}{\partial z} = 0. \end{array} \quad (2)$$

Идея Харлоу заключается в том, что уравнения первого этапа (уравнения первого дробного шага (2а)), не содержащие конвективных членов, интегрируются в неподвижной эйлеровой сетке, в то время как уравнения второго дробного шага (2б) служат для определения потоков на основе модели частиц. Потоки определяются дискретным образом: как только частица пересекает границу эйлеровой ячейки, переходя из ячейки 1 в ячейку 2, масса, импульс, энергия частицы вычитаются из массы, импульса, энергии ячейки 1 и прибавляются к массе, импульсу, энергии ячейки 2. Такие скачки потоков составляют характерную черту метода Харлоу. Они приводят к большим флуктуациям рассчитываемых величин, особенно плотности. В дальнейшем мы остановимся на анализе этих флуктуации.

Как известно, первоначальная схема Харлоу [30] обладала недостаточной устойчивостью, в связи с этим в дальнейших работах [8] были предприняты попытки усилить устойчивость метода частиц. Оставаясь последовательно на точке зрения расщепления и применяя неявные схемы, можно сильно повысить устойчивость метода частиц.

III. Рассмотрим анализ устойчивости метода частиц. Схема первого этапа легко может быть представлена как однородная разностная схема. Алгоритм второго этапа есть некоторая дискретная модель, которая не может быть прямо представлена как однородная разностная схема. Более точно мы получаем разностную схему с коэффициентами, зависящими от числа частиц, пересекающих границы ячейки. Если  $N$  - число частиц в ячейке велико, то поток ансамбля частиц может быть осреднен, и мы приходим к асимптотическому представлению метода частиц в виде некоторой однородной разностной схемы. Весь анализ аппроксимации, устойчивости и аппроксимационной вязкости проводится в этом приближении, который мы будем называть асимптотическим.

Рассматривая этапы метода Харлоу как дробные шаги, мы можем записать соотношение

$$S = S_1 S_2,$$

где  $S$  - оператор полного шага,  $S_1, S_2$  - операторы первого и второго дробного шага соответственно. Для устойчивости достаточно

$$\|S\| = \|S_1 S_2\| \leq 1 + O(\tau) \quad (3)$$

и тем более достаточно, если условию (3) удовлетворяет каждый оператор шага.

Схема интегрирования первого этапа по Харлоу абсолютно неустойчива, т. е. при любых  $m, h$  оператор  $S_1$  удовлетворяет условию  $\|S_1\| \geq 1 + \epsilon$ , где  $\epsilon$  не зависит от  $m, h$ . Однако на втором этапе, схема которого является условно устойчивой ( $\kappa \leq 1/|u|$ ), происходит компенсация неустойчивости первого этапа, и, в целом, оператор полного шага условно устойчив. В этом случае анализ схемы полного шага, основанный на локальном критерии по методу Фурье, дает следующее необходимое условие устойчивости:

$$\kappa \leq |u| / (u^2 + a^2), \text{ где}$$

$$a^2 = \frac{P}{2\rho^2 F_P} < c^2 = \frac{P/\rho^2 - F_P}{F_P}, \quad \kappa = \frac{\tau}{h},$$

$c$  - местная скорость звука. Если заменить неустойчивую схему первого этапа по Харлоу условно устойчивой схемой, например, вводя аддитивно в  $P$  линейную вязкость  $q = -Bc\rho h \, du/dx$ , то получим следующую оценку

$$\kappa \leq \frac{1}{|u| + 2Bc}, \quad \kappa \leq \frac{|u| + Bc}{[(1+B)|u| + c]^2}.$$

Применение неявной схемы на первом этапе приводит к дальнейшему повышению устойчивости схемы полного шага:

$$\kappa \leq 1/|u|.$$

Нами были использованы различные явные и неявные схемы первого этапа (табл. 1, где приведены также условия устойчивости указанных схем). Заметим, что анализ устойчивости производился как локальным методом Фурье, так и методом первого дифференциального приближения (см. п. VI). Аналогичный анализ был проведен для схем полного шага.

Пока еще не получены абсолютно устойчивые разностные схемы. Действительно, если схемы первого этапа; абсолютно устойчивы, то схема второго этапа, на котором прослеживается отдельно траектория каждой частицы, является условно устойчивой, и, следовательно, условно устойчивой является схема полного шага. Анализ устойчивости и аппроксимационной вязкости метода частиц приводит к следующим выводам:

а) если разностная схема полного шага в классическом варианте метода частиц

была неустойчивой в области застоя ( $u \rightarrow 0, c \neq 0$ ), то применение на первом этапе явных условно устойчивых схем делает схему полного шага условно устойчивой;

б) для веществ с большой скоростью звука (слабо сжимаемые среды), когда  $|u|/c \ll \ll 1$  использование на первом этапе явных схем приводит к сильному ограничению на шаг по времени  $\tau$ , которое может быть ослаблено применением неявных разностных схем ( $k \ll 1/|u|$ );

в) аппроксимационная вязкость и условия устойчивости не инвариантны относительно преобразования Галилея. Это обстоятельство может использоваться для улучшения устойчивости. В то же время оно имеет отрицательное значение, так как ширина и профиль разностной ударной волны зависит от скорости потока. Неинвариантность аппроксимационной вязкости относительно преобразования поворота может приводить к большим погрешностям при счете сферических сходящихся течений;

г) такая зависимость аппроксимационной вязкости и условий устойчивости от величины  $u$  приводит к автоколебаниям численного решения: в области малых скоростей схема неустойчива, начинается "разболтка",  $|u|$  растет, схема становится устойчивой,  $u$  принимает вновь малые значения и т. д.

IV. Наряду с неустойчивостью и автоколебаниями имеют место также нефизические флуктуации рассчитываемых величин. Если первые два явления имеют место и в асимптотике, т. е. при  $N \rightarrow \infty$ , то флуктуации связаны с конечным числом частиц в ячейке. В методе частиц поток вещества через границы ячейки меняется дискретно, что и приводит к флуктуациям плотности и давления.

Для уменьшения флуктуации были предложены следующие приемы:

Схемы	Анализ Неймана	Анализ п.ф.л.д.п.	Анализ г.ф.л.д.п.
1. Схема Харлоу $\tilde{u} = u^n - \frac{ak}{2} DP^n$ $\tilde{e} = e^n - \frac{bk}{2} D\tilde{u}$	Абсолютно неустойчива	$\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 = 0$	
2. Схема Харлоу $\tilde{u} = u^n - \frac{ak}{2} DP^n$ $\tilde{e} = e^n - \frac{bk}{2} D\tilde{u}$	$\kappa \leq \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	$\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 \geq 0$	$\kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} \text{ (III)}$
3. Схема Лакса $\tilde{u} = \alpha M u^n - \frac{ak}{2} DP^n$ $\tilde{e} = M e^n - \frac{bk}{2} Du^n$	$\kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \text{ } (\alpha=1)$ $\kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ } (\alpha=0)$	$\kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	
4. Схема Харлоу с линейной вязкостью $q = -Bc_0 \rho h u_x$ $\tilde{u} = u^n - akDM(P^n + q)$ $\tilde{e} = e^n - bkDM(\tilde{u}) - akDM(q\tilde{u}) + ak\tilde{u}DM(q)$	$\kappa \leq \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{Bc_0}{c^2}$ $\kappa \leq \frac{1}{2Bc_0}$	$\kappa \leq \frac{2\gamma Bc_0}{(\gamma-1)c^2}$	$\kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ (III)}$ $\kappa \leq \frac{1}{2Bc_0} \text{ (II)}$
5. В уравнении энергии вязкость $q = -a_1 c_0 h P_x$ $\tilde{u} = u^n - \frac{ak}{2} DP^n$ $\tilde{e} = e^n - \frac{bk}{2} D\tilde{u} + akDM(q)$	$\kappa \leq \gamma \frac{2a_1 c_0}{c}$	$\kappa \leq \frac{1}{2a_1(\gamma-1)c_0}$	

6. Схема Лакса–Вендроффа  
( $\theta = 0$ )

$$\tilde{u} = u^n \kappa DM(P^n) + \frac{\gamma-1}{2} \kappa^2 a(1+\theta) N(P^n, u^n)$$

$$\tilde{J} = J^n - \kappa [DM(Pu)^n - \tilde{u} DM P^n] + \frac{a(\gamma-1)}{2} \kappa^2 (1+\theta) \times \kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \lambda_2, \lambda_3 > 0 \quad \kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

7. Видоизмененная схема Лакса–Вендроффа ( $\theta \neq 0$ )

$$\kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(1+\theta)}} \quad \lambda_2, \lambda_3 > 0 \quad \kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(1+\theta)}}$$

Схемы типа предиктор–корректор.

Приводится лишь предиктор, корректором везде является схема вида

$$\tilde{\rho} = \rho^n, \quad \tilde{u} = u^n - \kappa DM(P^*)$$

$$\tilde{J} = J^n - \kappa DM(Pu)^* - \tilde{u} \kappa DM(P)^*$$

8. Схема Годунова

$$P^* = MP^n - \frac{M(cP)^n}{2} D_1 u^n \quad \kappa \leq \frac{2\gamma-1}{2(\gamma-1)} \frac{1}{c} \quad \kappa \leq 1/c \quad \kappa \leq 1/c$$

$$u^* = Mu^n - \frac{1}{2M(cP)^n} D_1 P^n \quad \kappa \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{c} \quad \kappa \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{c}$$

9. Схема Лакса

$$u^* = Mu^n - \kappa D_1 P^n \quad \kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$J^* = MJ^n - \kappa D_1 u^n$$

10.

$$u^* = u^n - \kappa DM(P)^n \quad \kappa \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \kappa \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{c}$$

$$E^* = E^n - \frac{\kappa}{2} DM(Pu)^n$$

Схемы	Анализ Неймана	Анализ п.ф.л.д.п.	Анализ г.ф.п.д.п.
11. Неявная схема с весами I $u^* = u^n - \frac{\kappa}{2} [\gamma_1 D_1 P^* + (1-\gamma_1) D_1 P^n]$ $J^* = J^n - \frac{\kappa}{2} [\gamma_2 D_2 u^* + (1-\gamma_2) D_2 u^n]$	Абсолютно устойчива		
12. Неявная схема с весами II $u^* = u^n - \frac{\kappa}{2} [\gamma_1 D_2 P^* + (1-\gamma_1) D_2 P^n]$ $J^* = J^n - \frac{\kappa}{2} [\gamma_2 D_1 u^* + (1-\gamma_2) D_2 u^n]$	Абсолютно устойчива		
13. Неявная симметрическая схема $u^* = u^n - \frac{\kappa}{4} DP^*$ $J^* = J^n - \frac{\kappa}{4} Du^*$	Абсолютно устойчива		
14. Неявная схема берущего счета в инвариантах $r^* = r^n - \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\kappa c}{2} D_2 r^*$ $S^* = S^n + \frac{\kappa c}{2} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}} D_1 S^*$	Абсолютно устойчива		
15. Явная схема в инвариантах $r^* = r^n - \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\kappa}{2} D r^n$ $S^* = S^n + \frac{\kappa c}{2} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}} D_1 S^n$	$\kappa \leq 2 \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{c}$		

**Примечания.**

Схемы первого этапа. Обозначения:

$$\begin{aligned}
 Du^n &= u_{i+1}^n - u_{i-1}^n, & Mu^n &= (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2, \\
 D_1 u^n &= u_{i+1}^n - u_i^n, & M_1 u^n &= (u_{i+1}^n + u_i^n)/2, \\
 D_2 u^n &= u_i^n - u_{i-1}^n, & M_2 u^n &= (u_i^n + u_{i-1}^n)/2, \\
 N(f, \psi) &= M_1 f \cdot D_1 \psi' - M_2 f \cdot D_2 \psi, & \rho &= \rho^n \\
 \tilde{u}_i &= (\tilde{u}_i + u_i^n)/2, & DMu^n &= u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n;
 \end{aligned}$$

п.ф.п.д.п., г.ф.п.д.п. — соответственно параболическая и гиперболическая форма первого дифференциального приближения;  $\lambda_j$  — собственные значения матриц "вязких" членов.

а) введение параметров формы частицы, "Одномерная" частица трактуется как тонкий стержень, "двумерная" частица представляет собой прямоугольник или круг. Такое введение "параметров формы" частицы приводит к ослаблению флуктуации;

б) введение третьего этапа, на котором происходит пересчет плотности по формулам, аппроксимирующим уравнение неразрывности. Рис. 3, 4 дают представление об уменьшении флуктуации.

По-видимому, метод частиц сходится при измельчении сетки и фиксированном числе  $N$  частиц в ячейке, хотя конечность  $N$  приводит к флуктуациям. Увеличение  $N$  означает сильное увеличение объема перерабатываемых массивов и требует большой памяти и быстродействия ЭВМ. По существу, метод частиц увеличивает на единицу размерность задачи. Следует заметить, что пересчет плотности позволяет получить удовлетворительные результаты при небольшом числе частиц в ячейке. В некоторых случаях это позволяет резко сократить объем перерабатываемых массивов и время счета.

Заметим, что улучшение устойчивости метода и устранение флуктуации позволяют распространить данный метод на слабосжимаемые течения жидкости. Например, в приближении вязкопластического течения были проведены расчеты соударения двух тел.

V. Флуктуации устраняются, если уравнения второго этапа решать по разностной схеме на эйлеровой сетке, а частицы использовать только как носители информации о потоке, траекториях и границах сред, не вводя их в алгоритм расчета. Здесь мы имеем аналогию с методом маркеров, где схема расчета основана на эйлеровой сетке и по расчетным скоростям определяются положения частиц и границ. Положение границ входит в расчет для определения осредненных термодинамических величин в ячейке. Во внутренних ячейках все потоки определяются без учета частиц по выбранной (однородной) схеме.

Метод маркеров позволяет применять неявные абсолютно устойчивые схемы и, следовательно, особенно удобен для расчета течений слабосжимаемых жидкостей. Авторы провели расчеты методом маркеров с применением неявной схемы в эйлеровых координатах, например рассматривалась задача о высокоскоростном ударе тела о преграду.

Неявные абсолютно устойчивые схемы в неподвижной эйлеровой сетке с расщеплением типа Харлоу на два дробных шага применялись в задачах метеорологии (см. [22]).

Заметим, что аппроксимируя уравнения второго этапа (26) явной разностной схемой, в которой пространственные производные аппроксимируются с учетом знака скорости, мы приходим к уравнениям метода FLIC [36].

VI. Рассмотрены некоторые вопросы теории разностных схем для гиперболических систем уравнений. Оказалось возможным задачу исследования устойчивости и аппроксимационной вязкости разностных схем свести к исследованию некоторой дифференциальной системы уравнений, отличающейся от исходной дифференциальной системы уравнений в случае схем первого порядка точности членами порядка  $O(\tau)$ . Эта вспомогательная система дифференциальных уравнений названа первым дифференциальным приближением разностной схемы и может быть записана в двух видах. Определение первого дифференциального приближения дано в работах [15, 16]. Например, в случае разностной схемы

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha} V_{\alpha} u^n(x + \tau \lambda_{\alpha}), \quad (4)$$

аппроксимирующей гиперболическую систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (5)$$

гиперболическая и параболическая формы первого дифференциального приближения имеют, соответственно, вид

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j,k=1}^s \tilde{c}_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial A_k}{\partial x_k}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^s D_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{j,k=1}^s c_{jk} \frac{\partial u^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{c}_{jk} = \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^j \lambda_{\alpha}^k B_{\alpha}, \quad c_{jk} = \tilde{c}_{jk} - \frac{\tau}{2} A_j A_k,$$

$$D_k = A_k - \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^s A_j \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right],$$

$A_k(x, t)$ ,  $B_{\alpha}(x, t)$  - вещественные  $m \times m$  матрицы,  $x \in R_2$ ,  $t = n\tau$ ,  $\lambda_{\alpha}$  -  $(\lambda_{\alpha}^1, \dots, \lambda_{\alpha}^n)$  - вектора смещения,  $u(x, t)$  - вектор-функция с  $m$  компонентами. При этом предполагается, что разностная схема имеет первый порядок точности и, следовательно, выполнены следующие условия совместности:

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha} = I, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^k B_{\alpha} = A_k \quad (k = 1, \dots, s),$$

$I$  - единичная матрица.

Систему уравнений (7) назовем неполной параболической в точке  $(x, t)$ , если при всех вещественных  $\omega_1, \dots, \omega_s$  сумма квадратов которых равна единице, корни уравнения

$$\det \left\| - \sum_{j,k=1}^s \omega_j \omega_k c_{jk} - \lambda I \right\| = 0$$

имеют неположительные действительные части

$$\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Система уравнений (7) отличается от исходной системы уравнений (5) "вязкими" членами

$$\sum_{j,k=1}^s c_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Если система дифференциальных уравнений (6) является гиперболической, то для нее имеет смысл рассматривать характеристики и область зависимости  $Q$  точки  $(x, t)$ . Для разностной схемы (4) мы можем также ввести понятие области зависимости  $Q^1$  точки  $(x, t)$ , как наименьшего замкнутого множества на гиперплоскости  $t = 0$  такого, что как только начальное значение  $u^0(x)$  равно нулю в открытом множестве, содержащем  $Q^1$ , соответствующее решение разностной схемы в точке  $(x, t)$  равно нулю для всех значений  $\tau$ .

Оказалось, что устойчивость разностных схем определяется неполной параболическостью их первых дифференциальных приближений и характером зависимости областей  $Q$  и  $Q^1$ . Ниже приводится ряд теорем, доказательства которых содержатся в работах [16—18].

Для одномерной гиперболической системы уравнений

$$(\partial u / \partial t = A(\partial u / \partial x)) \quad (8)$$

рассмотрим две схемы

а) простую схему [15, 16, 31]

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha=1}^n B_{\alpha} u^n(x + \tau \lambda_{\alpha}),$$

и

б) мажорантную схему [15, 16, 19]

$$u^{n+1}(x) = \sum_{j=-1}^1 B_j u^n(x + jh),$$

где

$$B_1 = \kappa A^+, \quad B_{-1} = -\kappa A^-, \quad A^+ \geq 0, \quad A^- \leq 0, \quad A = A^+ + A^-.$$

Справедливы следующие утверждения.

*Теорема 1. Если  $A(x, t)$  — симметрическая Липшиц-непрерывная матрица, то неполная параболичность системы уравнений первого дифференциального приближения является необходимым и достаточным условием устойчивости простой разностной схемы.*

*Теорема 2. Если  $A$  - симметрическая матрица,  $A^+$ ,  $A^-$  - Липшиц-непрерывные матрицы, то для устойчивости мажорантной схемы необходимо и достаточно, чтобы ее первое дифференциальное приближение было неполной параболической системой уравнений.*

Здесь и ниже устойчивость понимается в смысле выполнения неравенства

$$\|u^{n+1}\| \leq [1 + O(\tau)] \|u^n\|,$$

где  $\|\cdot\|$  означает норму пространства  $L_2$ .

Рассмотрим схему расщепления

$$u^{n+1}(x) = \Omega_s \dots \Omega_1 u^n(x), \text{ аппроксимирующую систему (5).}$$

Справедливы следующие теоремы:

*Теорема 3. Пусть  $\Omega_j = \sum_{\alpha=1}^s B_{\alpha}^j T^{\tau h_j} \alpha (j=1, \dots, s)$ , т.е. теорема имеет простую схему*

расщепления. Тогда, если  $A_j$  липшиц-непрерывные симметрические матрицы и система уравнений первого дифференциального приближения простой схемы расщепления является неполной параболической, то схема – устойчива.

*Теорема 4. Рассмотрим мажорантную схему расщепления (см. [19, 21])*

$$\Omega_j = k_j A_j^+ T_j + (1 - k_j |A_j|) E - k_j A_j^- T_{-j}$$

$$A_j = A_j^+ + A_j^-, \quad A_j^+ \geq 0, \quad A_j^- \leq 0, \quad |A_j| = A_j^+ - A_j^-, \quad k_j = \tau h_j$$

*Если  $A_j$  - симметрические матрицы,  $A_j^+$ ,  $A_j^-$  - липшиц-непрерывные матрицы и первое дифференциальное приближение мажорантной схемы расщепления является неполной параболической системой, то схема - устойчивая.*

*Теорема 5 Если  $A_j$  - симметрические матрицы,  $A_j^+$ ,  $A_j^-$  - липшиц-непрерывных уравнений (6) является устойчивой.*

*Теорема 6 Если  $A_j$  - липшиц-непрерывные симметрические матрицы и  $Q < Q'$ , то разностная схема Фридрихса [32], аппроксимирующая систему (6), является устойчивой.*

Метод первого дифференциального приближения был также применен к исследованию устойчивости и аппроксимационной вязкости разностных схем, аппроксимирующих нелинейные уравнения (в частности уравнения газовой динамики), хотя строго обоснования этому пока не имеется. В этом случае анализ методом первого дифференциального приближения дает ограничения на устойчивость, аналогичные случаю анализа локальным методом Фурье, и позволяет провести качественное сравнение разностных схем в смысле характера их устойчивости.

Возвращаясь к ранее изложенному, заметим, что система уравнений (6) получается из разностной схемы (4) разложением в ней функций  $u^{n+1}(x)$ ,  $u^n(x + \tau \lambda_\alpha)$  в ряды Тейлора и удержанием членов порядка  $O(\tau^2)$  включительно, а система уравнений (7) получается из системы уравнений (6) заменой  $\partial^2 u / \partial t^2$  через пространственные производные с использованием исходной системы уравнений (5). Удерживая в разложении  $u^{n+1}(x)$  члены более высокого порядка, чем  $O(\tau^2)$ , и оперируя с ними аналогично вышесказанному, в результате получим в матрицах "вязких членов" ( $c_{ik}$ ) дополнительные члены, зависящие от градиентов решений. Эти добавочные члены объясняют неустойчивость некоторых разностных схем, наблюдаемую в расчетах, которая не улавливается при анализе локальным методом Фурье, ибо он не учитывает влияния градиентов. Аналогичный подход применен в работе [33] при исследовании разностных схем для нелинейного уравнения газовой динамики.

**VII.** При решении задач математической физики разностными методами имеют

место эффекты аппроксимационной вязкости, т.е. вязкости, порождаемой структурой разностных схем. Численные расчеты показывают, что свойства разностной схемы особенно сильно проявляются при взаимодействии разрывов. В областях взаимодействия отмечаются большие отклонения газодинамических параметров от истинных значений. Эти отклонения ведут себя по-разному в зависимости от диссипативных свойств схемы и разностной сетки.

В зависимости от диссипативных свойств разностные схемы можно разделить на два класса. Во-первых, схемы, допускающие контактные разрывы (например, схема Неймана-Рихтмайера [29]) и, во-вторых, схемы, не допускающие контактных разрывов (например, схема Лакса [8]). Изучению диссипативных свойств разностных схем посвящен целый ряд исследований (см. работы [20, 23, 25, 34, 35], где приведена также достаточно полная библиография).

Диссипативные свойства схемы тесно связаны со структурой первого дифференциального приближения. Если система уравнений параболической формы первого дифференциального приближения является сильно параболической (параболической по Петровскому), то, как известно, имеет место сильное "размазывание" разрывов (в случае системы уравнений газовой динамики размазываются не только ударные волны, но и границы раздела двух сред). Так, например, схема Лакса, которой соответствует сильно параболическая система уравнений первого дифференциального приближения, размывает контактные границы и приводит к искусственной диффузии. Во избежание этого следует потребовать, чтобы аппроксимационная вязкость не работала на контактной характеристике ( $K$ -свойство). В работах [18, 26] с помощью понятия первого дифференциального приближения исследуются условия, при выполнении которых разностные схемы обладают свойством  $K$ .

Для системы уравнений (8) рассмотрим разностную схему первого порядка точности

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha} B_{\alpha} u^n(x + \alpha h), \quad (9)$$

где  $B_{\alpha}$  - постоянные  $m \times m$  матрицы,  $k = \tau/h = \text{const}$

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha} = I, \quad \sum_{\alpha} \alpha B_{\alpha} = \kappa A.$$

Первое дифференциальное приближение схемы (9) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где

$$C = \frac{h^2}{2\tau} \left[ \sum_{\alpha} \alpha^2 B_{\alpha} - \kappa^2 A^2 \right].$$

Пусть матрица  $A$  имеет различные вещественные собственные значения  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , и предположим, что одно из них равно нулю, т.е. существует вектор  $X$  такой, что  $XA = 0$ .

Определение. Разностная схема (9) обладает свойством  $K$ , если из соотношения  $XA = 0$  следует, что  $XC = 0$ .

При переходе к системе уравнений газовой динамики получаем, что наличие у разностной схемы аппроксимационной вязкости, сохраняющей контактный разрыв, равносильно тому, что схема обладает свойством  $K$ .

В работах [18, 26] сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия того, чтобы разностная схема обладала свойством  $K$ . Анализ аппроксимационной вязкости схем первого порядка точности может быть перенесен и на схемы повышенного порядка точности.

Сформулированные утверждения были использованы при построении разностных схем, обладающих свойством сохранения контактных разрывов и аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики как в эйлеровых координатах, так и в лагранжевых координатах. Метод первого дифференциального приближения позволяет выбрать из таких схем устойчивые разностные схемы. Разностные схемы строились так, чтобы аппроксимационная вязкость входила дивергентно в первое дифференциальное приближение и, кроме того, требовалось, чтобы первое дифференциальное приближение

(а следовательно, и аппроксимационная вязкость) было инвариантно относительно преобразования Галилея.

ВII. Были проведены многочисленные методические расчеты одномерных и двумерных газодинамических течений с целью получения монотонных схем расчета, улучшения устойчивости метода частиц в ячейке, устранения нефизических флуктуаций, поиска эффективных операторов сглаживания решения. Анализировалось влияние на точность расчетов величин шагов сетки по пространству и времени, расположения частиц в ячейке на начальный момент. Точность расчетов контролировалась сравнением с расчетами, проведенными по другим двумерным методикам (см., например, рис. 6,6) или же с одномерными расчетами в тех случаях, где это было возможно.

Рис. 1-5 иллюстрируют влияние некоторых приемов сглаживания численного решения на примере ряда одномерных течений. Аналитическое решение изображено на рисунках тонкой сплошной линией. На рис. 1 показан профиль скорости в стационарной ударной волне при использовании различных искусственных вязкостей: пунктирная линия - расчет по методу PIC без вязкости, тонкая непрерывная линия - линейная

вязкость вида  $q = ac_0 \cdot h \frac{\partial u}{\partial x}$ , аддитивно входящая в  $P$ ; жирная непрерывная линия -

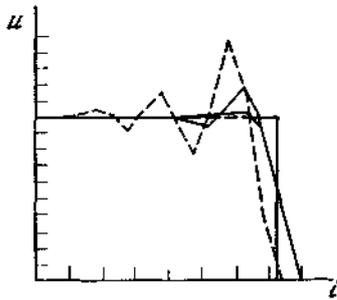


Рис. 1

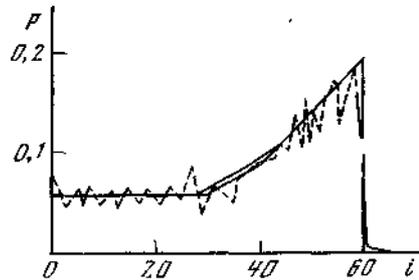


Рис. 2

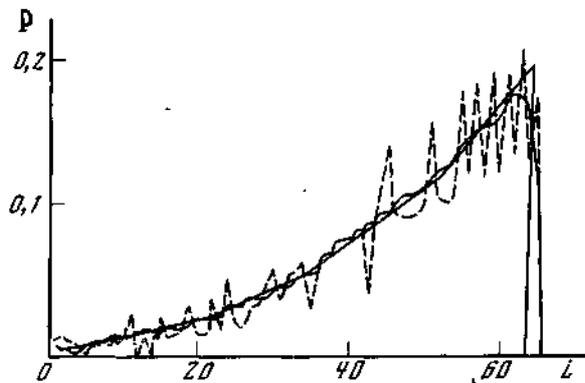


Рис. 3

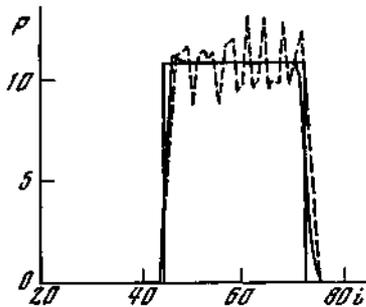


Рис. 4

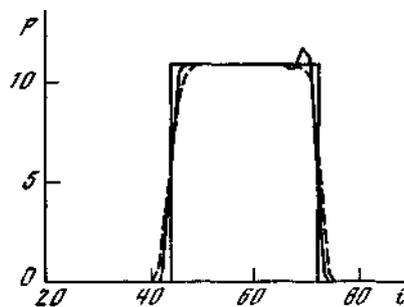


Рис. 5

линейная вязкость  $q = ac_0 (\partial P/\partial x)$ , входящая только в уравнение энергии. Следует заметить, что в расчетах по методу частиц в ячейке давление испытывает наибольшие флуктуации по сравнению с флуктуациями скорости и удельной внутренней энергии, и поэтому на рис. 2-5 показаны только профили давления. Рис. 2 иллюстрирует влияние "параметров" формы частиц в задаче о плоской детонационной волне в случае иницирования ВВ у жесткой стенки: пунктирная линия - расчет по методу PIC с линейной вяз-

костью, жирная непрерывная линия - частицы представляются в виде слоев (при этом  $ac_0 = 0,2$ ), рис. 3, 4 иллюстрируют влияние пересчета плотности соответственно в задаче об одностороннем истечении продуктов детонации и задаче о распаде разрыва скоростей. При этом на рис. 3 при  $t = 0$  число частиц в ячейке равно 2, а  $ac_0 = 0,2$ . На рис. 5 показан случай, когда в качестве схемы первого этапа взяты соответственно схема Годунова [10] и видоизмененная схема Лакса-Вендроффа [27].

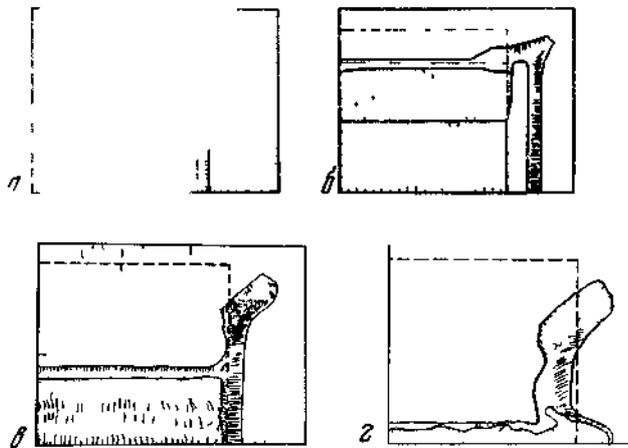


Рис. 6

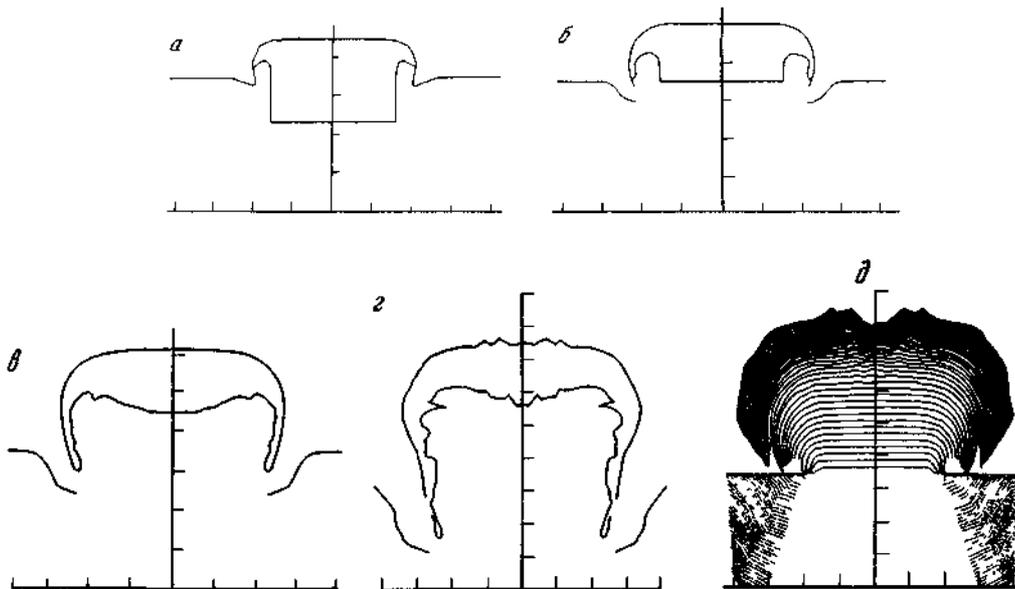


Рис. 7

С помощью метода частиц в ячейке был решен ряд двумерных задач, часть из которых является повторением (с несколько измененными параметрами) расчетов, описанных в [37- 40]. В частности, рассматривались взаимодействие ударной волны с деформируемым предметом, осесимметричное движение газов под действием приложенного давления, течение газа в каналах со скачком сечения, задача о взаимодействии тел при больших скоростях соударения, течения газа с детонационными волнами, дифракция ударных волн на клине и конусе и задача о тейлеровской неустойчивости

Кратко опишем результаты некоторых двумерных расчетов. На рис 6 показано расположение частиц в разные моменты, а также движение контактной границы и ударной волны в случае осесимметричного движения двух невязких нетеплопроводных газов с уравнениями состояния  $P_\alpha - (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha \varepsilon_\alpha$ ,  $\gamma_\alpha = 5/3$ ,  $\alpha = 1,2$  под действием постоянного давления  $P = 1$ , приложенного на верхнюю и правую границы второго газа. При  $t = 0$  газы холодные покоящиеся и их начальное положение показано на рис. 6,а. Первый газ, расположенный во внутреннем цилиндре, имеет плотность 0,67, второй - 11,4. Ячейки сетки-квадраты со стороной 0,05. На рис. 6, б указано положение внешней границы в момент времени  $t = 0,774$ , полученное из расчета по методике, описанной в [12]. На рис. 7, а-в показаны на различные моменты времени формы кратера и цилиндра при высокоскоростном соударении цилиндра с толстой преградой (начальная стадия процесса), а на рис. 7, г — траектории отдельных частиц, лежащих на

лицевой стороне преграды.

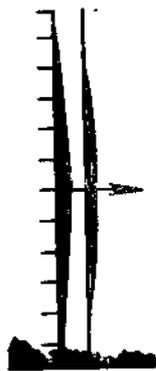


Рис. 8

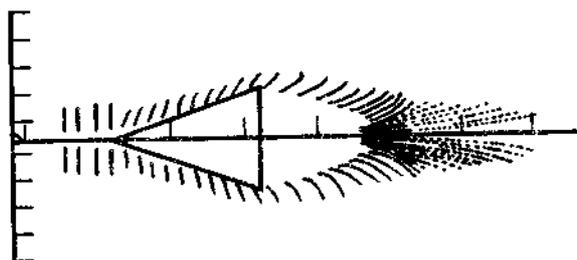


Рис. 9

Начальная стадия деформирования стенки цилиндра при набегании детонационной волны изображена на рис. 8.

На рис. 9 даны траектории отдельных частиц в задаче о дифракции ударной волны на клине.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков А.И. // Тр. МИАН СССР, 1960. Г. 8.
2. Русанова В.В. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 2. С. 267-279.
3. Годунов С.К. Разностные методы решения уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1962.
4. Ричардсон Дж. // Вычислительные методы в гидродинамике / Под. ред. Б. Олдера и др. М.: Мир 1967.
5. Носкин Н.Э. // Там же.
6. Шульц У.Д. // Там же.
7. Нох В.Ф. // Там же.
8. Харлоу Ф.Н. // Там же.
9. Франк Р.М., Лазарус Р.Б. // Там же.
10. Годунов С. К. // Мат. сб. 1959. Т. 47 (89), № 3. С. 271-306.
11. Яненко Н.Н., Фролов В.Ф., Неуважяев В.Е. // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2.
12. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961 Т.1, №6.
13. Дьяченко В.Ф. // Там же. 1965. Г. 5, № 4. С. 680-688.
14. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. М.: Наука, 1967.
15. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. // ДАН СССР. 1968. Т. 182, № 4. С. 776-778.
16. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 5. С. 493-502.
17. Шокин Ю.И. // Тр. Всесоюз. семинара по числ. методам механики вязкой жидкости / Под ред. Н.Н. Яненко. Новосибирск: Наука, 1969.
18. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5.
19. Анучина Н.Н. // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 74. С. 5-15.
20. Рождественский Б. Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
21. Яненко Н.Н. // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Л., 1964. Т. 2.
22. Марчук Г.И. // Численные методы в прогнозе погоды. Л., 1967.
23. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во иностр. лит. 1960.
24. Куропатенко В.Ф. // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 74. С. 107-137.
25. Русанов В.В. // ДАН СССР. 1968. Т. 180, № 6. С. 1303-1305.
26. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. // Там же. Т. 182, № 2. С. 280-281.
27. Яушев И.К. // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 190-120.
28. Lax P.D. // Commun. Pure and Appl. Math. 1954. Vol. 7, N 1. P. 159-193.
29. Neumann J. von, Richtmyer R.D. // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21. P. 232.
30. Harlow F.H. // J. Assoc. Comput. Math. 1957. N 4. P. 137.
31. Hahn S.G. // Commun. Pure and Appl. Math. 1958. Vol. 11, N 2. P. 243-255.
32. Friedrichs K.P. // Ibid. 1954. Vol. 7, N 2. P. 345-392.
33. Hirt C.W. // J. Comput. Phys. 1968. Vol. 2, N 4. P. 339-355.
34. Kreiss H.O. // Commun. Pure and Appl. Math. 1964. Vol. 17, N 3. P. 335-353.
35. Lax P.D., Wendroff B. // Ibid. 1960. Vol. 13, N 1. P. 217-238.
36. Gentry R.A., Martin R.E., Daly B.J. // J. Comput. Phys. 1966. Vol. 1, N 1. P. 87-118.
37. Harlow F.H., Dickman D.O., Harris D.E., Martin R.E. // Los Alamos Sci. Lab. Rep. 1959. N LA-2301.
38. Evans M.W., Harlow F.H., Meixner B.D. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5, N 6.
39. Harlow F.H., Pracht W. // Ibid. 1966. Vol. 9, N 10. P. 1951-1959.
40. Riney T.D. // AIAAJ. 1965. Vol. 3, N 1. P. 52-63.